*

Studier i semantikk og erkjennelsesteori

Del II

*

Morten Rognes

1978

*

Innledning ***1***
§1 Forkunnskaper 2
§2 Formål 2
§3 Om strukturen til teoriene E, E:1 og E:2 2
§4 Om oppbygningen til E:2 3
§5 Noen kommentarer i forbindelse med E:2 4
§6 Skisse av innholdet 5

Kapittel I ***7***
§0 Innledning 8

Avsnitt A **9**
§1 Begrepet preferanserelasjon 9
§2 Et avledet preferansesystem 12
§3 Setninger om preferansesystemet <Q:R, E:R> 14

Avsnitt B **26**
§1 Innledning 26
§2 Det preferanselogiske systemet P0 27
§3 Modellteori for P0 29
§4 Det preferanselogiske systemet P1 32
§4.1 Modellteori for systemet P1 32
§5 Det preferanselogiske systemet P2 35
§5.1 Modellteori for systemet P2 35
§6 Det preferanselogiske systemet P3 38
§6.1 Modellteori for P3 38
§7 Alternative aksiomatiseringer og modifikasjoner av systemene P0 – P3 41

Avsnitt C **43**
§0 Innledning 43
§1 Preliminære definisjoner og resultater 43
§2 Konstruksjon av kanoniske modeller 46
§3 Preliminære resultater av relevans for resultatene om avgjørbarhet 57
§4 Om eksistensen av en avgjørelsesprosedyre for preferanselogikken P0 63
§5 Avsluttende bemerkninger 69

Kapittel II ***71***
§0 Innledning 72

Avsnitt A **72**
§1 Språket til teorien E 72
§2 Noen nye semantiske antagelser 73
§3 Evidensteoretiske aksiomer 76
§4 Ultraintensjonale modifikasjoner av EpA1 – EpA17 81
§5 Tidsteoretiske aksiomer 84

§5.1 Ultraintensjonale modifikasjoner av de tidsteoretiske aksiomene....86
§6 Oppsummering....87

Avsnitt B....87
§0 Innledning....88
§1 Aksiomer om aksepterbarhet....88
§2 Ultraintensjonale modifikasjoner av de akseptanseteoretiske aksiomene....91
§3 Konsekvenser av de evidensteoretiske, tidsteoretiske og akseptanseteoretiske aksiomene....91
§4 Epistemiske og doxastiske aksiomer....95
§5 Defintiv aksepterbarhet....97
§6 Ultraintensjonale modifikasjoner av de epistemiske og doxastiske akiomene....102
§7 Om innholdet i resten av dette avsnittet....104
§7.1 Om muligheten av å gi en nøyere analyse av enkelhetsrelasjonen....104
§8 Noen bemerkninger for å forhindre misforståelser av de evidensteoretiske og epsistemisk/doxastiske aksiomene....108
§9 Induktive slutninger....110

Avsnitt C....112
§1 Aksiomer i forbindelse med begrepet prøvbarhet....112
§2 Et svakere prøvbarhetsbegrep....121
§3 Andre mulige prøvbarhetsbegreper....122
§4 Ultraintensjonale modifikasjoner av de prøvbarhetsteoretiske aksiomene....122

Avsnitt D....123
§1 Bevisbegrepet....123

Avsnitt E....128
§1 Vitenskapelige lover....128
§2 En teori om universelle lovutsagn....128
§3 Aksiomene i teorien....129
§4 Kontrafaktiske betingelsesutsagn....138
§5 Om muligheten av å analysere den kausale alternativrelasjonen R:c....140
§6 Angående sammenhengen mellom forklaringer og lover....143
§7 Forklaring av lover....145
§8 Oppsummering. Definisjoner av teoriene E, E:1 og E:2....147

Kapittel III....151
§0 Innledning....152
§1 Preliminære begrepsdannelser....152
§2 Et fragment av L:(E:2)....156
§2.1 En mengdeteoretisk intepretasjon av L:0 inn i L:ê....156
§2.2 Bevis for at M er en modell for Rest(E:2,L:0)....163
§3 Mengdeteoretiske intepretasjoner av aksiomene om lover i E:2....173
§3.1 Modellen M:1....173
§3.2 Modellene M:2 og M:3....175
§3.2 Modellen M:4....177
§4 Et generelt intepretasjonsteorem for teorien Rest(E:2,L:F)....178

Kapittel IV....185
§1 Om muligheten av å begrunne E:2. Begrunnelsesbegreper....186
§2 Om muligheten av å gi en begrunnelse for E:2....190
§3 Om muligheten av reduktive begrunnelser av E:2....196

§4 Karakteriseringsproblemer....199
§5 Noen uformelle bemerkninger om uttrykksrikdommen til L:(E:2)....201
§6 Bemerkninger om en del aksiomer som kunne tenkes å bli lagt til E:2....202

Appendix I....217
§1 Språket L:(E:2)....218
§2 Teorien E:2....220
§3 Teorien E....220
§4 Teorien E:1....221

Referanser....226
Referanser....227

Innledning

Innledning

§1 Forkunnskaper.

I Del I av dette arbeidet, som går under navnet "Studier i semantikk og erkjennelsesteori. Del I", heretter forkortet med "SSE-I", har vi beskrevet en familie av med grunnleggende semantiske teorier: T;A – T;D, T;A* – T;D*. At de er grunnleggende vil si at de er grunnleggende for våre formål her.

Det følgende arbeid er en fortsettelse og videreføring av avhandlingen "Studier i semantikk og erkjennelsesteori. Del I" og et inngående kjennskap til dette arbeidet er derfor helt igjennom nødvendig for en tilfredsstillende tilegnelse av teoriene, resultatene og metodene i det følgende. De forkunnskaper i logikk som trengs ved lesningen av dette arbeidet er beskrevet i innledningskapitlet i "Studier i semantikk og erkjennelsesteori. Del I" og det vil derfor ikke bli redegjort for dem her. Leseren anbefales å konsultere "Studier i semantikk og erkjennelsesteori. Del I" siden de begrepsdannelsene som er innført der vil bli brukt forholdsvis fritt i denne delen av avhandlingen.

§2 Formål.

Målet med denne delen av avhandlingen er å gi en fullstendig og detaljert beskrivelse av en temmelig grunnleggende og konsekvensrik teori, E;2, av erkjennelsesteoretisk karakter. Denne teorien er svært omfangsrik og vil bli detaljert fremstilt med kommentarer i Kapittel II. Jeg tror det ikke er mulig i denne innledningen å gi leseren et helt klart og velbegrunnet bilde av betydningen til E;2 for erkjennelsesteorien og vitenskapsfilosofien, men jeg tror dette vil gå klarere opp for en når man påtar seg den møysommelige oppgaven som består i å sette seg inn i teorien. To andre teorier, som kan oppfattes som fragmenter av E;2 vil også bli detaljert fremstilt og diskutert. Vi har valgt å kalle dem for henholdsvis E og E;1. Fremgangsmåten er at vi først gir en eksplisitt fremstilling av E og E;1; E;2 fremkommer så ved visse modifikasjoner av E;1.

§3 Om strukturen til teoriene E, E:1 og E:2.

Det kan være passende å gi en litt nøyere beskrivelse av strukturen til teoriene E, E;1 og E;2. La oss begrense oss til E;2 siden våre bemerkninger med visse endringer lar seg anvende på E og E;1. Vårt utgangspunt er den semantiske teorien T;A*. Denne teorien er definert rigorøst som en første-ordens teori i språket L;A*. En detaljert definisjon av T;A* og språket L;A* er gitt i Del I av dette arbeidet. Vi gjør så følgende: Først utvider vi L;A* til et første-ordens språk L;(E;2) ved å legge til visse nye ikke-logiske predikater. Mer nøyaktig legger vi til predikatene (1) – (40) som er oppført på listen i §1 i Appendix I. Leseren bør studere denne listen nøye, og også den tilsvarende listen over predikater i L;A* som befinner seg i Del I, Appendix I, for å danne seg mer konkrete forestillinger om hvordan språket L;(E;2) fortoner seg. Som man ser er det et meget rikt første-ordens språk som inneholder omtrent hundre

primitive, ikke-logiske predikater. Siden det ikke er noen grunn til å tro at de ikke-logiske predikatene som inngår i L;(E;2), men ikke i L;A* er definerbare i L;A*, synes det berettiget å si at L;(E;2) er uttrykkskraftigere enn L;A*. I L;(E;2) kan man for eksempel uttrykke påstander om kunnskap, tro, sanseiaktagelse, evidens, enkelhet, prøvbarhet ved teorier, forklaringsverdien til teorier, forholdet mellom teorier og observasjosutsagn og en rekke andre emner som ikke kan uttrykkes i L;A*. Dette innebærer at L;(E;2) er av interesse fra en erkjennelsesteoretisk synsvinkel. Siden de ikke-logiske predikatene som inngår i L;(E;2) tilsynelatende uttrykker begreper som vi i vesentlige henseeender har forholdsvis klare intuisjoner om, kan det være naturlig å tro at L;(E;2) har en naturlig modell M. Man kan i så fall si at vårt mål er å kodifisere alle de setningene som er sanne i denne intuitive modellen M. Naturlig nok ønsker vi også noe mer, nemlig å kodifisere klassen av de setninger i L;(E;2) som er sanne i alle logisk mulige modeller for L;(E;2). Kort sagt er det ideelle målet å aksiomatisere i det minste en viktig del av de logiske sannhetene i L;(E;2). E;2 representerer vår fullstendig forsøksvise forslag til en partiell løsning av dette problem. Naturligvis kan det eksistere mange andre mulige løsningsforslag som er uforenelige med E;2. Når vi derfor likevel har konsentrert oppmerksomheten mot denne teorien er det fordi vi har funnet den noe mer plausibel enn de andre alternativene vi så langt har vært i stand til å tenke ut.

§4 Om oppbygningen til E:2.

La oss nå se litt nøyere på oppbygningen av E;2. Som nevnt er E;2 en utvidelse av T;A*. Denne teorien utgjør så og si "ryggraden" i E;2. Det følger fra dette at alle de satser som er utledbare i T;A* også er utledbare i E;2. Spesielt har man da, siden ZFC – Zermelo-Fraenkel systemet for mengdelære utvidet med utvalgsaksiomet – er en del av T;A* at alle teoremer i ZFC er utledbare i E;2.

Man får nå teorien E;2 fra T;A* ved først å utvide språket L;A* til L;(E;2) og dernest legge en rekke nye formler i L;(E;2) til aksiomene i T;A* som nye ikke-logiske aksiomer. Disse nye aksiomene kan på en forholdsvis naturlig måte grupperes i de følgende klasser: (i) visse evidensteoretiske aksiomer, (ii) visse akseptanseteoretiske aksiomer, (iii) rent kunnskapsteoretiske aksiomer, (iv) visse aksiomer om prøvbarhet, (v) visse aksiomer om tid, (vi) aksiomer om kauallover og vitenskapelige forklaringer, og endelig (vii) visse aksiomer om hypotetiske betingelsesutsagn, eller det som også kalles for kontrafaktiske kondisjonalutsagn. *Leseren anbefales på dette punkt å konsultere Appendix I hvor en helt detaljert og rigorøs definisjon er gitt av teorien, sammen med fragmentene E og E;1 av den. De forskjellige aksiomene kan leseren så finne formulert fortløpende i Kapittel II.* Siden det er temmelig mange aksiomer i hver klasse er teorien temmelig omfattende.

T;A* kan karakteriseres som en teori som direkte og indirekte sier noe om en lang rekke emner: mening, sannhet, språk, intensjonale- og ultraintensjonale objekter av forskjellig slag, logisk sannhet , mulighet og nødvendighet, teorier og formale systemer, samt en rekke andre emner. Siden E;2 er en utvidelse av T;A* vil selvfølgelig E;2 også være en teori om disse emner, men i tillegg kan man, siden språket til E;2 er rikere og nye ikke-logiske aksiomer er lagt til, uttrykke og bevise en rekke satser om emner som man overhodet ikke kan si noe om innenfor den mer snevre rammen til T;A*. Det dreier seg om slik emner som sanseiaktagelse, evidens, prøvbarhet ved teorier, viten, tro, forklaring og en rekke andre ting. Det forekommer meg derfor nokså klart at E;2 må kunne oppfattes som en teori som

burde ha betraktelig interesse fra en filosofisk synsvinkel, i alle fall om de nevnte emner kan sies å ha noen filosofisk interesse.

§5 Noen kommentarer i forbindelse med E:2.

En rekke bemerkninger er trolig på sin plass i forbindelse med E;2 for å unngå en del misforståelser:

(a) For det første vil vi understreke teoriens tentative og hypotetiske karakter. Det ble nevnt ovenfor at vi tenkte oss en naturlig modell M for L;(E;2). Selvom man kanskje kunne hevde at man har forholdsvis klare intuisjoner om visse aspekter ved denne modellen, innebærer ikke dette at våre intuisjoner om alle aspekter ved den er fastlagt. Hvis man derfor tenker seg alle de setningene i L;(E;2) som virker temmelig opplagte på nesten alle kompetente forskere plukket ut – la oss kalle denne setningsklassen for X – er det godt mulig at flere innbyrdes uforenelige teorier T;1, T;2, T;3, ... som alle impliserer setningene i X med like stor rett kan sies å aksiomatisere de logiske sannhetene i L;(E;2) eller deler av dem. Situasjonen ligner derfor i en rekke henseende på den som foreligger i mengde-læren. Som bekjent foreligger det en lang rekke mengdeteorier formulert, og ZFC er bare en av dem, som innbyrdes motsier hverandre. Det synes derfor berettiget å bemerke at en av de sikreste tingene man kan si om E;2 er at vi ikke vet om teorien er korrekt. Snarere oppfatter vi den – i likhet med de teoriene som ble presentert i Del I – som en meget omfangsrik arbeidshypotese med en lang rekke potensielt interessante sider. Det er altså både legitimt og fornuftig å diskutere detaljert alternativer til E;2 og sammenligne dem med denne teorien. Imidlertid er det også nødvendig å diskutere og utdype konsekvensene av E;2 på alle de viktigste områdene den dekker, slik at man tydeligere kan danne seg et bilde av i hvilken grad det er mulig å utlede grovt motintuitive setninger fra den. Dette er vår hovedoppgave her. En detaljert komparativ gjennomgåelse av alternativer til E;2 må forbli gjenstand for eventuelt fremtidig forskning.

(b) Det kan også være verdt å understreke teoriens svake og ufullstendige karakter. Siden rekursiv aritmetikk er intepreterbar i E;2 følger det fra Gødels resultater at teorien er kronisk ufullstendig og at man f.eks. ikke innenfor rammen av E;2 kan bevise motsigelsesfriheten til denne teorien selv. De setningene man kan konstruere og bevise uavgjørbarheten til på denne måten er imidlertid av en spesiell karakter. La oss tenke oss at F er klassen av alle de filosofisk og erkjennelsesteoretisk sett interessante påstandene som kan uttrykkes i L;(E;2). Teorien E;2 ville ha en forholdsvis stor grad av fullstendighet med hensyn på F om alle setningene i en forholdsvis omfattende delmengde Y Inkl F var avgjørbare i E;2. Siden uttrykket "filosofisk og erkjennelsesteoretisk sett interessant påstand" er meget vagt er det naturligvis umulig å si noe eksakt om fullstendighetsgraden til E;2 med hensyn på mengden F. Men en grov, skjønnsmessig, vurdering synes å lede til den konklusjon at teorien i visse henseende er forholdsvis svak og ufullstendig. Man bør imidlertid ikke dra for vidtgående slutninger fra dette. Det kan ofte være en fordel å arbeide med forholdsvis svake teorier. De kan lett skjerpes og utvides etter behov.

(c) Endelig kan det være av interesse å nevne teoriens helt rigorøse og eksakte natur. Vi har her fremstilt en kunnskapsteori med nøyaktig samme presisjon, stringens og eksaktheter som man finner ved fremstillingen av for eksempel teorier innenfor matematikken. Når teorien her omtales som "eksakt" innebærer imidlertid ikke dette at predikatene i teorien er "eksakte", eller "fullstendig eksakte". Det innebærer bare at teorien kan gjøres til gjenstand

for undersøkelser av metalogisk og logisk karakter på nøyaktig samme eksplisitte og oversiktlige måte som man kan gjøre det i forbindelse med en hvilken som helst teori innenfor matematikken. I denne forbindelse er det vesentlig å nevne følgende: Siden E;2 er formulert helt eksplisitt er det lettere å kritisere teorien, det vil si å avdekke svake punkter ved den, enn ved en teori som er mindre eksplisitt og oversiktlig utformet. Videre vil en helt eksplisitt og rigorøst formulert teori ofte virke mindre "dypsindig" enn mer uklart formulerte teorier. Det forkommer meg imidlertid som om den "dypsindighet" som profiterer på uklare uttrykksmåter og manglende analytisk presisjon, hva enten det gjelder fremstillingen eller de begreper som introduseres, ikke bør tilskrives noen spesielt stor verdi.

Siden E;2 er en syntese av en rekke innbyrdes uavhengige delteorier, for eksempel er de akseptanseteoretiske aksiomene delvis uavhengige av de evidensteoretiske, de epistemiske aksiomene uavhengige av dem som har med prøvbarhet å gjøre osv. –, bør det også noteres at kritikk som rammer en delteori ikke nødvendigvis behøver å fremtvinge noen dyptgående revisjoner av de andre delene av teorien. De semantiske aksiomene i T:A* synes imidlertid i denne forbindelse å stå i en særstilling. Dype inngrep i denne delen av teorien synes å måtte medføre forandringer også i de mer perifere delene.

Som antydet er E;2 i kraft av sin eksplisitte formulering, samt rigorøse og systematiske oppbygning, en teori som kan gjøres til gjenstand for helt stringente modellteoretiske og bevisteoretiske undersøkelser. I denne sammenheng kan det være passende å nevne hva det er som vi anser for vår avhandlings resultater. Dette er kort sagt alle de teoremene vi har oppført og som vi har gitt bevis for, samt alle de teoremene hvor vi ikke har skrevet opp noe bevis, men er villige til å gi et bevis om det forlanges. La det da med en gang være nevnt at E;2 – og forøvrig de andre beslektede teoriene vi har nevnt – gir opphav til en nær sagt ubegrenset mengde med problemer vedrørende uavhengighet, relativ konsistens, fullstendighet og andre emner som man med rimelig sikkerhet kan hevde at kan avgjøres innenfor rammen av vanlig logikk og mengdelære. Det er bare en brøkdel av disse problemene som er løst i avhandlingen og hvor vi eksplisitt har utformet metodene for en løsning. Såvidt vi kan se stor man muligens ovenfor et meget rikt forskningsfelt her. Man kan nære et håp om at logikere med tiden vil føle seg tiltrukket av dette studiet, og etterhvert vil bidra med mer avanserte og sofistikerte metoder, såvel som resultater, som kan kaste et dypere lys over de teoriene som er fremlagt her.

§6 Skisse av innholdet.

Tilslutt skal vi nå gi en kort skisse av innholdet i de følgende kapitler. Kapittel I er en selvstendig enhet som kan leses helt uavhengig av de andre delene. Vi gir her bevis for en rekke setninger om preferanserelasjoner som vi har bruk for utover i avhandlingen. Videre formulerer vi en rekke preferanselogiske systemer og beviser fullstendigheten til dem alle. Avgjørbarhetsproblemet tas opp i forbindelse med disse logikkene og vi viser at en nærmere spesifisert delmengde av de systemene vi har innført har en avgjørelsesprosedyre. Vi har imidlertid ikke lykkes med å vise dette for alle logikkene. Vi har satt dette kapitlet inn som Kapittel I fordi resultatene er viktige, og fordi de danner en god – trolig også nødvendig – bakgrunn for den evidens- og akseptanseteoretiske delen av E;2. I Kapittel II gir vi så en fullstendig fremstilling av teoriene E, E;1 og E;2 med kommentarer. I Kapittel III studerer vi hovedsakelig konsistens og uavhengighetsproblemer i forbindelse med visse viktige

fragmenter av E, E;1 og E;2. Kapittel IV er tilslutt viet visse grunnlagsproblemer i forbindelse med E;2, samt et vidt spektrum av andre problemer som oppstår ved studiet av de forskjellige komponentene i teorien. Teorien blir i dette kapitlet utviklet videre og belyst fra forkjellige synsvinkler.

Kapittel I

Kapittel I

§0 Innledning.

Før vi går løs på den detaljerte redegjørelsen for teorien E;2 i neste kapittel vil vi i dette kapitlet introdusere en generell teori om preferanserelasjoner og preferanselogiske systemer. Stoffet som presenteres her er i det store og hele godt egnet for en bedre fortåelse av visse deler av E;2 – særlig den akseptanseteoretiske delen. Det kan sies adskillig til fordel for at man bør beherske det stoffet som fremlegges her godt før man går over til studiet av E;2.

Med en preferanserelasjon forstår vi en total preordning. I den første delen av dette kapitlet studerer vi generelt visse egenskaper ved preferanse-relasjoner som er særlig viktige fra vårt synspunkt. Siden svært mange relasjoner kan karakteriseres som preferanserelasjoner har denne teorien et meget vidt anvendelsesområde. Den er derfor i prinsippet anvendbar på alle områder hvor preferanserelasjoner dukker opp. Dette skjer innen etikken og verditeorien hvor man blandt annet er interessert i relajoner som f.eks. "Handlingen h;1 bør foretrekkes fremfor handlingen h;2", "Saksforholdet s;1 har minst like stor indre verdi som saksforholdet s;2", "Handlingen h;1 er bedre enn handlingen h;2", "Samfunnet s;1 er bedre enn samfunnet s;2" osv., for bare å atyde noen eksempler. Men også innenfor erkjennelsesteorien synes man å være interessert i slike relasjoner. La oss eksempelvis nevne "Påstanden p;1 er sikrere enn påstanden p;2", "Påstanden p;1 bør i lys av all foreliggende evidens foretrekkes fremfor påstanden p;2", "Teorien t;1 bør aksepteres fremfor teorien t;2", "Teorien t;1 bør foretrekkes fremfor teorien t;2 i lys av all gitt, relevant evidens". Igjen bør det understrekes at disse eksemplene er nokså vilkårlig valgt.

Den mer generelle preferanseteorien blir redegjort for i Avsnitt A. Det bør nevnes at de fleste resultatene her er av en elementær natur og ikke av spesielt original karakter. I Avsnitt B går vi over til å studere preferanselogiske systemer. Vi begrenser oss her til setningslogikker. Utgangspunktet er en vanlig versjon av modallogikken S5. Denne utvides med nye binære og ternære setnings-dannende konstruksjoner på setninger. Disse konnektivene intepreteres så med utgangspunkt i teorien om preferanserelasjoner. Vi studerer så egenskapene til de ny-introduserte konnektivene og definerer i tilknytning til dem en familie med preferanselogikker. En detaljert og stringent beskrivelse av systemene er gitt i Avsnitt B. I Avsnitt C studerer vi fullstendighets- og avgjørbarhetsproblemene til logikkene i denne familien. Vi gir detaljerte bevis for fullstendigheten til dem og beviser også avgjørbarhet for en delmengde av logikkene i familien.

Avsnitt A

§1 Begrepet preferanserelasjon.

La oss først innføre noen hjelpebegreper som vi helt formelt definerer slik:

Definisjon 1.0(i) $D(R) = Mg(x: (Ey)(xRy)) \cup Mg(x: (Ey)(yRx))$
(ii) $VD(R) = Mg(x: (Ey)(xRy))$
(iii) $HD(R) = Mg(x: (Ey)(yRx))$

Som man ser er D(R) det totale domenet til relasjonen R. VD(R) er det venstre domenet til R og HD(R) er det høyre domenet til relasjonen R. Vi definerer så "R er en preferanserelasjon" på følgende vis:

Definisjon 1.1 Vi sier at R er en preferanserelasjon, i symboler "Pref(R)" hvis og bare hvis R oppfyller de følgende krav:

(i) Rel(R)
(ii) $(Ax)(x \hat{e} D(R) \rightarrow xRx)$
(iii) $(Ax)(Ay)(x,y \hat{e} D(R) \rightarrow xRy \vee yRx)$
(iv) $(Ax)(Ay)(Az)(x,y,z \hat{e} D(R) \& xRy \& yRz. \rightarrow xRz)$

Her er predikatet "Rel(R)", "R er en relasjon" defiert på den vanlige mengdeteoretiske måten. Fra definisjonen fremgår det at en preferanserelasjon er en relasjon som er refleksiv, transitiv og total. En annen måte å si dette på er at det dreier seg om en total preordning, i det en preordning er en refleksiv og transitiv relasjon.

Den følgende sats er lett å bevise og beviset overlates derfor til leseren:

Teorem 1.2 $Pref(R) \& a \text{ Inkl } D(R) \rightarrow Pref(R\Omega (aXa))$

Denne satsen sier at dersom R en preferanserelasjon og a er en delmengde av det totale domenet til R så er også restriksjonen av R til aXa en preferanserelasjon.

Vi definerer så "x~;R y" og "xR*y" ved:

Definisjon 1.3(i) $x \sim_R y \leftrightarrow (xRy \& yRx)$
(ii) $xR^*y \leftrightarrow (xRy \& \neg(yRx))$

Har man at x~:R y sier vi ar x er R-ekvivalent med y. Er det slik at xR*y sier vi at x er strengt R-bedre enn y.

Teorem 1.4 Anta Pref(R) og at $x,y,z \hat{e} D(R)$. Da gjelder:

(i) $\neg(xR^*x)$
(ii) $xR^*y \rightarrow \neg(yR^*x)$
(iii) $xR^*y \& yR^*z \rightarrow xR^*z$
(iv) $xR^*y \vee x \sim_R y \vee yR^*x$
(v) $x \sim_R x$

(vi) x~;R y –> y~;R x
(vii) x~;R y & y~;R z –> x~;R z
(viii) x~;R y –> xR*z –> yR*z
(ix) x~;R y –> zR*x –> zR*y

Bevis: Når det gjelder punkt (i) og (ii) er det opplagt at disse holder i lys av Definisjon 1.3.

Ad (iii): Anta xR*y & yR*z. Dette impliserer i lys av Definisjon1.3 at (1) xRy & ¬(yRx) & yRz & ¬(zRy). Da har man åpenbart xRz siden R er en preferanserelasjon og derfor transitiv. Anta for reduktio ad absurdum at zRx. Da har man siden R er transitiv at yRz. Men dette er åpenbart umulig i lys av (1). Følgelig har vi xRz& ¬(zRx), med andre ord at xR*z.

(iv) – (vii) er trivielle og beviset overlates her til leseren.

Ad (viii): Anta (1) xRy & yRx samt at (2) xRz &¬(zRx). Fra (1) og (2) har man, siden R må være transitiv at (3) yRz. Hadde man zRy ville man i lys av (1) ha zRx som strider mot (2). Man har følgelig i lys av (3) at yRz& ¬(zRy), medandre ord: yR*z.

Når det gjelder punkt (ix) bevises dette på nøyaktig samme måte som punkt (viii). Dette avslutter beviset. **Q.E.D.**

Vi innfører nå predikatet "x er et preferansesystem" ved den følgende definisjon:

Definisjon 1.5 Vi sier at w er et preferansesystem, i symboler "Pref;S(w)" hvis og bare hvis det finnes R1 og R2 som oppfyller følgende krav:

(i) Rel(R1) & Rel(R2)
(ii) w = <R1,R2>
(iii) D(R1) Inkl D(R2)

Er x,y og z vilkårlige elementer i D(R2) holder følgende påstander:

(vi) ¬(x R1 x)
(v) x R1 y –> ¬(y R1 x)
(vi) x R1 y & y R1 z –> x R1 z
(vii) x R1 y v x R2 y v y R1 x
(viii) x R2 x
(ix) x R2 y –> y R2 x
(x) x R2 y & y R2 z –> x R2 z
(xi) x R2 y –> x R1 z –> y R1 z
(xii) x R2 y –> z R1 x –> z R1 y

Som man ser er et preferansesystem et ordnet par av relasjoner med det samme totale domene og der relasjonene oppfyller kravene (i) – (ix) i Teorem 1.4. Dette innebærer at den første relasjonen skal være en irrefleksiv, asymmetrisk og transitiv relasjon, mens den andre relasjonen skal være en ekvivalensrelasjon og hvor de to relasjonene også må oppfylle kravene (xi) og (xii) som er nevnt i definisjonen.

Fra definisjonen ovenfor og Teorem 1.4 er det også klart at den følgende sats holder:

Teorem 1.6 Pref(R) –> Pref;S(<R*, ~;R>)

På den annen side er det også lett å se at det følgende teorem må kunne la seg bevise:

Teorem 1.7 Pref;S(<x,y>) –> Pref(xUy)

Fra disse to teoremene ser man at klassen av preferanserelasjoner over et gitt domene X kan avbildes en-entydig på klassen av preferansesystemer over X. Preferanserelasjoner og preferansesystemer er derfor i en viss forstand to helt ekvivalente strukturer.

Definisjon 1.8 Q(R) = Mg(Mg(x: xRy): yêD(R))

Er R en ekvivalensrelasjon er Q(R) klassen av alle R-ekvivalensklasser over domenet til R.

Vi definerer "R er en lineær ordning" ved:

Definisjon 1.9 Vi sier at R er en lineær ordning, i symboler "Ord(R)", hvis og bare hvis R oppfyller de følgende krav for alle x,yêD(R):

(i) xRy –> ¬(yRx)
(ii) xRy & yRz –> xRz
(iii) xRy v yRx v x=y

En lineær ordning er altså en asymmetrisk, transitiv og strengt total relasjon.

Videre definerer vi:

Definisjon 1.10 L(R) = Mg(<x,y>: x,yêQ(~;R) &
(Ew;1)(E;w2)(w;1êx &w;2êy & w;1R*w;2)

I forbindelse med denne definisjonen bemerker vi at det totale domenet til L(R) = Q(~;R) om R er en preferanserelasjon. Vi overlater til leseren å bevise dette.

Vi vil nå bevise den følgende sats som viser at L(R) er en lineær ordning dersom R er en preferanserelasjon. Dette innebærer at L kan oppfattes som en operasjon som avbilder klassen av preferanserelasjoner inn i klassen av lineære ordninger på en naturlig måte.

Teorem 1.11 Pref(R) –> Ord(L(R))

Bevis: (i) Vi ønsker først å bevise at L(R) er transitiv. Anta derfor <x,y>êL(R) og <y,z>êL(R). Da har vi i lys av definisjonen av L(R) at :

(1) x,y,zêQ(R) og at det finnes w;1, w;2, w;1', w;2' slik at:
(2) w;1êx & w;2,w;1' êy & w;2'êz & w;1R*w;2 & w;1' R* w;2'.

Fra den andre konjunkten her, samt (1) og Definisjon 1.8 følger at w;2 ~;r w;1' siden R er en preferanserelasjon. Dette og (2) impliserer w;1 R* w;2', som igjen sammen med (2) og Definisjon 1.10 impliserer at <x,z>êL(R).

(ii) Det er også nødvendig å bevise at L(R) er asymmetrisk. Anta for reduktio ad absurdum at det finnes x,y slik at <x,y>êL(R) & <y,x>êL(R). Da har man på samme måte som ovenfor at (1) x,yêQ(~;R) og at det finnes w;1, w;2, w;1' og w;2' slik at : (2) w;1,w;1'êx & w;2,w;2' êy & w;1R*w;2 & w;2' R* w;1'. Fra (1), Definisjon 1.8 og forutsetningen om at R er en preferanserelasjon følger:
w;1 ~;R w;1' & w;2 ~;R w;2'. Men i lys av (2) og Teorem 1.4 er dette umulig.

(iii) La oss tilslutt vise at L(R) er strengt total: Anta x,yêQ(~;R). Det følger at det finnes w;1 og w;2 slik at w;1êx & w;2êy. I følge Teorem 1.4 eksisterer det da bare tre muligheter: (a) w;1R*w;2. I så fall har vi i lys av definisjonen av L(R) at <x,y>êL(R). (b)

w;1 ~;R w;2. Da følger det siden R er en preferanserelasjon at ~;R er en ekvivalensrelasjon. Siden x,yêQ(~;R) impliserer dette at x=y. (c) w;2R*w;1. I så fall har man igjen i lys av definisjonen av L(R) at <y,x>êL(R).

I alle disse tilfellene har man <x,y>êL(R) v x=y v <y,x>êL(R). Dette viser at L(R) også er total. **Q.E.D.**

Ved studiet av preferanserelasjoner er det gunstig å ha til rådighet en operator som for hver mengde x Inkl R der R er en preferanserelasjon plukker ut de R-maksimale elementene i x om det finnes noen slike. Vi gir den følgende definisjon av "Max(R,a)" som leses "klassen av de R-maksimale elementene i a":

Definisjon 1.12 $\mathrm{Max}(R, a) = a\Omega\, \mathrm{Mg}(y: \neg(Ex)(x \hat{e} a \,\&\, xR^*y))$

Den følgende setning gir en noen viktige opplysninger om operatoren Max:

Teorem 1.13 Anta Pref(R) og at a Inkl D(R). Da gjelder:

(i) $\mathrm{Max}(R,a)\neq\emptyset \rightarrow (Ey)(y \hat{e} D(R) \,\&\, \mathrm{Max}(R,a) = a\Omega\, \mathrm{Mg}(x: x\sim;R\ y))$

(ii) $x,y \hat{e} \mathrm{Max}(R,a) \rightarrow x\sim;R\ y$

(iii) $x \hat{e} \mathrm{Max}(R,a) \,\&\, x\sim;R\ y \rightarrow y \hat{e} \mathrm{Max}(R,a)$

Bevis: Vi bemerker først at (ii) og (iii) følger umiddelbart fra (i) om R er en preferanserelasjon og a er inkludert i det totale domenet til R. Det er derfor tilstrekkelig å bevise (i).

Anta $\mathrm{Max}(R,a)\neq\emptyset$. Da finnes det en z slik at (1) $z \hat{e} \mathrm{Max}(R,a)$. Vi ønsker å bevise: (+) $(Ay)(y \hat{e} \mathrm{Max}(R,a) \rightarrow y\sim;R\ z)$. Anta derfor for vilkårlig y at $y \hat{e} \mathrm{Max}(R,a)$. Fra dette og definisjonen av Max-operatoren følger:

(2) $y \hat{e} a \,\&\, \neg(Ex)(x \hat{e} a \,\&\, xR^*y)$. Herav har man i kraft av definisjonen av R*: (3) $(Ax)(x \hat{e} a \,\&\, xRy \rightarrow yRx)$. På samme måte har man fra (1) at:

(4) $z \hat{e} a \,\&\, (Az)(z \hat{e} a \,\&\, xRz \rightarrow zRx)$. Fra (2), (3) og (4) følger så: (6) $yRz \leftrightarrow zRy$. Siden R er en preferanserelasjon har man yRz v zRy. Dette sammen med (6) gir en at yRz & zRy, med andre ord: $y\sim;R\ z$. Dermed er (+) bevist. Vi vil nå også bevise:

(++) $(Ay)(y \hat{e} a \,\&\, y\sim;Rz \rightarrow y \hat{e} \mathrm{Max}(R,a))$. Anta derfor (7) $y \hat{e} a \,\&\, y\sim;R\ z$ for vilkårlig y. Anta videre for vilkårlig w at (8) $w \hat{e} a \,\&\, wRy$. Fra (7) har man at yRz & zRy. Dette og (8) gir en (9) wRz siden R er en preferanserelasjon. Siden $z \hat{e} \mathrm{Max}(R,a)$ har vi:

(10) $(Ax)(x \hat{e} a \,\&\, xRz \rightarrow zRx)$. Dette, (8) og (9) gir zRw. Men w var vilkårlig derfor:

(11) $(Aw)(w \hat{e} a \,\&\, wRy \rightarrow zRw)$. I lys av (7) impliserer dette:

(12) $(Aw)(w \hat{e} a \,\&\, wRy \rightarrow yRw)$. Men $y \hat{e} a$ derfor kan vi slutte $y \hat{e} \mathrm{Max}(R,a)$. Demed har vi bevist (++).

Fra (+) og (++) følger siden $z \hat{e} D(R)$ at:

$(Ez)(z \hat{e} D(R) \,\&\, \mathrm{Max}(R,a) = a\Omega \mathrm{Mg}(x: x\sim;R\ z))$. Dermed har vi gitt et fullstendig bevis for satsen. **Q.E.D.**

§2 Et avledet preferansesystem.

La oss definere:

Definisjon 2.1 j(R,a) = Mg(b: bΩa≠ø & b Inkl D(R) & Max(R, bΩa)≠ø)

Vi definerer videre to relasjoner Q*;<R,a> og E*;<R,a> ved:

Definisjon 2.2 (a) <b1,b2>êQ*;<R,a> <–> b1,b2êj(R,a) &
(Ex1)(Ex2)(x1êMax(R,b1Ωa) & x2êMax(R,b2Ωa) & x1 R*x2)
(b) <b1,b2>êE*;<R,a> <–> b1,b2êj(R,a) &
(Ex1)(Ex2)(x1êMax(R,b1Ωa) & x2êMax(R,b2Ωa) & x1 ~;R x2)

Vi kan nå bevise den følgende sats:

Teorem 2.3 Anta Pref(R) og a Inkl D(R). Anta b1,b2, b3êj(R,a) Da gjelder:
(i) ¬(b1 Q*;<R,a> b1)
(ii) b1 Q*;<R,a> b2 –> ¬(b2 Q*;<R,a> b1)
(iii) b1 Q*;<R,a> b2 & b2 Q*;<R,a> b3 –> b1 Q*;<R,a> b3
(iv) b1Q*;<R,a>b2 v b1E*;<R,a> b2 v b2Q*;<R,a>b1
(v) b1E*;<R,a> b1
(vi) b1E*;<R,a> b2 –> b2E*;<R,a> b1
(vii) b1E*;<R,a> b2 & b2E*;<R,a> b3 –> b1E*;<R,a> b3
(viii) b1E*;<R,a> b2 –> b1Q*;<R,a>b3 –> b2Q*;<R,a>b3
(ix) b1E*;<R,a> b2 –> b3Q*;<R,a>b1 –> b3Q*;<R,a>b2

Bevis: Ad (i): Dette er opplagt i lys av Teorem 1.13 i forrige paragraf og forutsetningen om at R er en preferanserelasjon.

Ad (ii). Denne påstanden følger umiddelbart fra punkt (i) og (iii).

Ad(iii): Anta b1 Q*;<R,a> b2 & b2 Q*;<R,a> b3. I lys av Definisjon 2.2 må det da finnes objekter x1,x2, x3 og x4 slik at:

(1) x1êMax(R,b1Ωa) & x2êMax(R,b2Ωa) & x1R*x2 og

(2) x3êMax(R,b2Ωa) & x4êMax(R,b3Ωa) & x3R*x4. Fra (1) og (2) sammen med Teorem 1.13 følger x2 ~;R x3 som i lys av (1) og Teorem 1.4 impliserer x1R*x3. Dette og den siste komponenten i (2) impliserer x1R*x4 siden R er en preferanserelasjon. Dette, (1) og (2) gir en så i lys av Definisjon 2.2 at
b1 Q*;<R,a> b3.

Ad (iv): Siden b1,b2êj(R,a) har vi i lys av definisjonen av operatoren j at det finnes x1,x2 slik at (1) x1êMax(R,b1Ωa) og (2) x2êMax(R,b2Ωa). Det er nå tre muligheter siden R er en preferanserelasjon:

Tilfelle (a): x1R*x2. Da har man b1Q*;<R,a>b2 i lys av (1) og (2) samt definisjonen av Q*;<R,a>.

Tilfelle (b): x1~;R x2. Da har man b1E*;<R,a>b2 i lys av (1) og (2) samt definisjonen av relasjonen E*;<R,a>.

Tilfelle (c): x2 R*x1. Da har man ved hjelp av (1) og (2) og definisjonen av Q*;<R,a> at b2Q*;<R,a>b1.

I alle tilfellene har man: b1Q*;<R,a>b2 v b1E*<R,a> b2 v b2Q*;<R,a>b1. Dette viser at (iv) holder.

Ad (v) – (vii): Det overlates til leseren å gi bevis for disse påstandene.

Ad (viii): Anta b1E*;<R,a> b2 –> b1Q*;<R,a>b3. Ved hjelp av Definisjon 2.1 kan man da slutte at det finnes elementer x1, x2, x3 og x4 slik at:

(1) x1êMax(R,b1Ωa) & x2êMax(R,b2Ωa) & x1~:R x2 og

(2) x3êMax(R,b1Ωa) & x4êMax(R,b3Ωa) & x3R*x4 Fra (1) og (2) sammen med Teorem 1.13 følger x1 ~;R x3 som i lys av (1) og Teorem 1.4 impliserer x2~;Rx3. Dette og den siste komponenten i (2) gir en x2 R* x4 i lys av Teorem 1.4 og det at R er en preferanserelasjon. Fra dette og Definisjon 2.2 kan man så slutte b2Q*;<R,a>b3.

Ad (ix): Denne påstanden bevises på samme måte som den forrige. Dermed har vi gitt et fullstendig bevis for satsen. **Q.E.D.**

Det følgende er et umiddelbart korollar til Teorem 2.3:

Teorem 2.4 (i) Pref(R) & a Inkl D(R) –> Pref;S(<Q*;<R,a>, E*;<R.a>>)
(ii) Pref(R) & a Inkl D(R) –> Pref(Q*;<R,a>U E*;<R,a>)

§3 Setninger om preferansesystemet <Q:R, E:R>

Vi skal studere et par relasjoner som er svært lik dem vi definerte i §2 ved Definisjon 2.2. Det dreier seg om de følgende to:

Definisjon 3.1 (a) aQ;R b <–> a,b Inkl D(R)&
(Ex1)(Ex2)(x1êMax(R,a) & x2êMax(R,b) & x1 R*x2)
(b) aêE;Rb <–> a,b Inkl D(R)
(Ex1)(Ex2)(x1êMax(R,a) & x2êMax(R,b) & x1 ~;R x2)

Vi legger først merke til at den følgende sats holder:

Teorem 3.2 Anta Pref(R) og b1,b2, b3êD(R) Da gjelder:

(i) ¬(b1 Q;R b1)
(ii) b1 Q;R b2 –> ¬(b2 Q;R b1)
(iii) b1 Q;R b2 & b2 Q;R b3 –> b1 Q;R b3
(iv) Max(R,b1)≠ø & Max(R,b2)≠ø –> b1Q;Rb2 v b1E;R b2 v b2Q;Rb1
(v) Max(R,b1)≠ø –> b1E;R b1
(vi) b1E;R b2 –> b2E;R b1
(vii) b1E;R b2 & b2E;R b3 –> b1E;R b3
(viii) b1E;R b2 –> b1Q;Rb3 –> b2Q;Rb3
(ix) b1E;R b2 –> b3Q;Rb1 –> b3Q;Rb2

Beviset for denne setningen er helt analogt med beviset for Teorem 2.3 og vi overlater det derfor til leseren. Merk også at vi i lys av Definisjon 3.1 har at:

Teorem 3.3 Pref(R) & a,b Inkl D(R) & Max(R,a)=ø –>
¬(aQ;Rb) & ¬(bQ;Ra) & ¬(bE;Ra) & ¬(aE;Rb)

I lys av denne setningen ser man at forbeholdene i punkt (iv) og (v) i Teorem 3.2 er vesentlige.

Vi definerer:

Definisjon 3.4 (i) Q+;R =
Q;RΩMg(<a1,a2>: a1,a2 Inkl D(R) & Max(R,ai)≠ø &i=1,2)
(i) E+;R =
E;RΩMg(<a1,a2>: a1,a2 Inkl D(R) & Max(R,ai)≠ø &i=1,2)

I lys av denne definisjonen er den følgende sats et direkte korollar til Teorem 2.4;

Teorem 3.5 (i) Pref(R) & a Inkl D(R) –> Pref;S(<Q+;R, E+;R>)

Dette er klart i lys av definisjonen av Q+;R og E+;R at:

(i) Q+;R = Q*;<R, D(R)> og
(ii) E+:R = E*;<R,D(R)>.

Teorem 3.5 følger derfor umiddelbart fra dette og Teorem 2.4.

I resten av denne paragrafen vil vi gi bevis for en rekke satser om relasjonene Q;R og E;R som vil være til stor nytte senere. Vi starter med:

Teorem 3.6 Pref(R) & a,b Inkl D(R) –> (aQ;R b –> (a–b)Q;R b)

Bevis: Anta hypotesene holder og at aQ;Rb. Ved hjelp av Definisjon 3.1 følger da eksistensen av x1, x2 der (1) x1êMax(R,a) og (2) x2êMax(R,b) og hvor man dessuten har: (3) x1R*x2. Fra (1) følger ved hjelp av definisjonen av Max at:

(4) (Ay)(yêa & yRx1 –> x1Ry) samt (5) x1êa. Fra (4) følger:

(6) (Ay)(yê(a–b) & yRx1 –> x1Ry). Anta nå for reduktio ad absurdum at (+) x1êb. Fra (2) følger (Ay)(yêb &yRx2 –> x2Ry) som sammen med (+) impliserer: (6) x1Rx2 –> x2Rx1. Men dette strider mot (3). Følgelig har vi ¬(x1êb) og derfor i lys av(5) at x1ê(a–b). Dette sammen med (6) gir oss at x1êMax(a–b,R). Dette, (2), (3) og definisjonen av Q;R impliserer at (a–b)Q;R b. Dette viser at satsen holder. **Q.E.D.**

Teorem 3.7 Pref(R) & a,b Inkl D(R) –> (aQ;R b –> (aUb)E;R a)

Bevis: Anta hypotesene holder og at aQ;Rb. Ved hjelp av Definisjon 3.1 følger da eksistensen av x1 og x2 der: (1) x1êMax(R,a) og (2) x2êMax(R,b) og som forøvrig er slik at (3) x1R*x2. Fra (1) og definisjonen av Max-operatoren følger:

(4) (Ay)(yêa & yRx1 –> x1Ry) & x1êa.

Fra (2) følger likeledes: (5) (Ay)(yêb & yRx2 –> x2Ry). Anta nå for vilkårlig y at (6) yêb & yRx1. I lys av (3) følger yRx2 siden R er en preferanserelasjon. Defor har man ved hjelp av (5) og (6) at x2Ry. Dette sammen med (3) impliserer x1R*y. Men y var et vilkårlig objekt som oppfylte (6). Man har derfor:

(7) (Ay)(yêb & yRx1 –> x1Ry). Fra (4) og (7) følger x1êMax(R,aUb). Men fra dette, (1) og definisjonen av E;R følger (aUb)E;R a. **Q.E.D.**

Teorem 3.8 Pref(R) & a,b Inkl D(R) –>
(Max(R,aΩb)≠ø &aQ;R b –> aQ;R aΩb)

Bevis: Fra den fjerde hypotesen følger i kraft av Definisjon 3.1 at det finnes x1 og x2 der: (1) x1êMax(R,a) og (2) x2êMax(R,b) og som forøvrig er slik at (3) x1R*x2. Fra den tredje hypotesen følger eksistensen av x3 hvor (4) x3êMax(R,aΩb). Anta nå for reduktio ad absurdum at (+) x3R*x2. Dette innebærer at x3Rx2 & ¬(x2Rx3). Fra (2) har man: (5) (Ay)(yêb & yRx2 –> x2Ry) som impliserer, siden x3êb ifølge (4) at: x3Rx2 –> x2Rx3. Men dette strider mot (+). Følgelig har man:

(6) x2R*x3 v x2~;R x3. Dette impliserer i lys av (3) og forutsetningen om at R er en preferanserelasjon at (7) x1R*x3. Fra dette, (1), (4) samt Definisjon 3.1 kan man konkludere med at aQ;R (aΩb). **Q.E.D.**

Teorem 3.9 Pref(R) & a,b Inkl D(R) –> (aQ;R b –> (a–b)E;R a)

Bevis: Anta Pref(R) & a,b Inkl D(R) & aQ;R b. Da har vi i lys av Teorem 3.6 at (1) (a–b)Q;Rb og i lys av Teorem 3.7 at (2) (AUb)E;Ra. Siden (a–b) Inkl a Inkl D(R) følger fra (1) ved hjelp av Teorem 3.7 at (3) ((a–b)Ub)E;R(a–b). Dette er ekvivalent med (aUb)E;R(a–b). Fra (2). (4) og Teorem 3.2 følger så (a–b)E;R a. Dette viser at satsen holder. **Q.E.D.**

Teorem 3.10 Pref(R) & b Inkl D(R) –> ¬(bΩcQ;R b)

Bevis: Anta for reduktio ad absurdum at hypotesene holder og dessuten at negasjonen av konsekventen i teoremet holder. Da finnes x1,x2 der man har:

(1) x1êMax(R, bΩc) & x2êMax(R,b) & x1R*x2. Fra de to første konjunktene følger:

(2) (Ay)(yê(bΩc) & yR*x1 –> x1R*y) & x1ê(bΩc)

(3) (Ay)(yêb & yRx2 –> x2Ry). Fra den siste konjunkten i (2), samt (3), følger at x1Rx2 –> x2Rx1. Men dette strider mot den siste konjunkten i (1). **Q.E.D.**

Teorem 3.11 Anta Pref(R) & a,b Inkl D(R) og at Max(R,a)≠ø ≠Max(R,a–b). Anta dessuten at Max(R,aΩb)≠ø ≠ Max(R, a–b). Da gjelder:

(i) (b–a)E;Rb v bQ;R(b–a)
(ii) aΩb E;R b v bQ;R (b–a)
(iii) aE;R (a–b) v aQ;R (a–b)
(iv) aE;R (aΩb) v aQ;R (aΩb)
(v) a E;Rb –> (a E;R (b–a) v aQ;R (b–a))

Bevis: Satsen følger umiddelbat fra Teorem 3.10 ved hjelp av Teorem 3.2. **Q.E.D.**

Teorem 3.12 Pref(R) & a,b Inkl D(R)& (Max(R,b–a)≠ø –>
(aQ;R b –> aQ;R(b–a))

Bevis: Anta forutsetningene holder og at (1) aQ;Rb. Fra Teorem 3.10 har man at ¬((b–a)Q;Rb). I lys av forutsetningene, (1) og Teorem 3.2 er dette ekvivalent med:
(2) bQ;R(b–a) v bE;R(b–a). Men siden aQ;Rb har vi fra dette og Teorem 3.2 at aQ;R(b–a). **Q.E.D.**

Teorem 3.13 Pref(R) & a,b Inkl D(R) –> (aE;R b –> aE;R aUb)

Bevis: Anta forutsetningene holder og at aE;Rb. Fra Definisjon 3.1 følger da eksistensen av x1,x2 der:

(1) x1êMax(R,a) & x2êMax(R,b) & x1~;Rx2.

Det vil være tilstrekkelig å bevise:

(2) x1ê(aUb) & (Ay)(yê(aUb) & yRx1 –> x1Ry) fordi dette impliserer at x1êMax(R,aUb) som sammen med (1) gir oss det vi ønsker. Fra (1) og definisjonen av Max-operatoren følger x;1êa og derfor x1êaUb. Anta for vilkårlig y at (3) yê(aUb) & yRx1. Er yêa har vi siden den første komponenten i (1) impliserer at (Ay)(yêa & yRx1 –> x1Ry) at x1Ry. Anta (4) yêb. Fra den andre konjunkten i (1) følger x2êb & (Ay)(yêb & yRx2 –> x2Ry). Fra det siste her og det at x1~;R x2 følger (Ay)(yêb & yRx1 –> x1Ry). I lys av siste konjunkt i (3) og (4) har vi herav yRx1. Hva enten yêa eller yêb har vi derfor x1Ry. Dette viser at (2) holder. **Q.E.D.**

Merk at det omvendte til Teorem 3.13, at aE;R(aUb) impliserer aE;Rb ikke holder. Vi har:

Teorem 3.14 Anta Pref(R) & a,b Inkl D(R). Anta videre at:
b SInkl a & a E;R b & Max(R,a–b)≠ø. Da gjelder:
(a–b) E;R aΩb v aΩb Q;R (a–b)

Bevis: Anta forutsetningene i teoremet holder. Siden b SInkl a har man at
(1) bΩa=b. Fra forutsetningene og Teorem 3.10 følger: (2) ¬(a–b)Q;R a. I lys av forutsetninger og Teorem 3.2 impliserer dette:

(3) aE;R(a–b) v aQ;R(a–b). I kraft av forutsetningen om at aE;Rb og Teorem 3.2 har vi far (3) at: r og Teorem 3.2 impliserer dette:

(3) bE;R(a–b) v bQ;R(a–b). I lys av (1) impliserer dette:
(a–b) E;R aΩb v aΩb Q;R (a–b). **Q.E.D.**

Vi oppsummerer endel av de viktigste resultatene ovenfor i det følgende teorem:

Teorem 3.15 Anta Pref(R) & a,b Inkl D(R). Da gjelder:
(i) a Q;R b –> (a–b) Q;R b
(ii) aQ;R b –> (aUb) E;R a
(iii) Max(R,aΩb)≠ø & aQ;R b –> aQ;R(aΩb)
(iv) aQ;Rb –> (a–b)E;Ra
(v) ¬((aΩb) Q;R a)
(vi) aE;Rb –> aE;R(aUb)

Bevis: Satsen følger temmelig direkte ved hjelp av Teorem 3.6, Teorem 3.7, Teorem 3.8, Teorem 3.9, Teorem 3.10 og Teorem 3.13. **Q.E.D.**

Teorem 3.16 Pref(R) & a,b,c Inkl D(R) & Max(R,c)≠ø –>
(aQ;Rb –> (aUc) Q;Rb)

Bevis: Fra den tredje forutsetningen følger eksistensen av z der man har
(1) zêMax(R,c). Fra den fjerde forutsetningen følger eksistensen av x1 og x2 der:

(2) x1êMax(R,a)
(3) x2êMax(R,b) og

(4) x1R*x2.
Fra (1) kan man slutte (5) zêc & (Ay)(yêc & yRz –> zRy). Tilsvarende følger fra (2): (6) x1êa & (Ay)(yêa & yRx1 –>x1Ry). Vi skal skille mellom tre tilfelle:

Tilfelle(i): Anta (0) x1R*z. Anta for vilkårlig y at (7) yê(aUc) &yRx1. (a) yêa. Da har vi i lys av (6) og (7) at yRx1. (b) yêc. Fra (5) følger da:

yRz –> zRy. Fra (7) og (0) følger yR*z og derfor må man ha yRz. Det følger derfor at zRy. Men i lys av (0) impliserer dette x1Ry. Siden y var vilkårlig følger (Ay)(yê(aUc) & yRx1 –> x1Ry). Men x1êa Inkl aUc. Man har derfor x1êMax(R,aUc). Dette, (3), (4) samt Definisjon 3.1 impliserer (aUc)Q;Rb. Satsen holder derfor i dette tilfellet.

Tilfelle (ii): Anta (8) x1~;Rz. Anta igjen for vilkårlig y at (9) yê(aUc) & yRx1). Vi sondrer nå mellom to undertilfeller: (a) yêa &yRx1. Da har man i lys av (6) at x1Ry. (b) yêc & yRx1. Fra dette og (8) følger yRz som sammen med (5) innebærer at zRy. Dette og (8) gir x1Ry. I begge undertilfellene har man altså x1Ry. Siden y var vilkårlig følger (Ay)(yê(aUc) & yRx1 –> x1Ry). Men x1êa Inkl aUc. Man har derfor x1êMax(R,aUc). På samme måte som i forrige tilfelle har man da (aUc)Q;Rb.

Tilfelle (iii): (9) zR*x1. Vi studerer også nå to undertilfeller i det vi antar (10) yê(aUc) &yRz for vilkårlig y. (a) yêa & yRz. Fra (9) følger i så fall yRx1. Dette, yêa og (6) x1Ry som sammen med (9) gir zRy. (b) yêc &yRz. Da har man umiddelbart zRy i kraft av (5).

I begge tilfelle har man zRy. Siden y var vilkårlig følger derfor:

(11) (Ay)(yê(aUc) & yRz –> zRy). Men zêc Inkl (aUc). Man kan derfor slutte : zêMax(R, aUc). Nå har man x1R*x2 og derfor i lys av (9) at zR*x2. Summa summarum må man derfor ha:

zêMax(R, aUc) & x2êMax(R,b) & zR*x2.
Men dette innebærer i lys av Definisjon 3.1 at (aUc)Q;Rb.

I alle tilfellene (i) –(iii) holder (aUc)Q;Rb. Dette viser at satsen holder. **Q.E.D.**

Teorem 3.17 Pref(R) & a,b Inkl D(R) –> (aQ;R b –> aUb Q;R b)

Bevis: Siden aQ;Rb impliserer Max(R,b)≠ø under forutsetningene i teoremet følger satsen umiddelbart ved hjelp av Teorem 3.16. **Q.E.D.**

Teorem 3.18 Pref(R) & a,b Inkl D(R) & Max(R,a)≠ø & Max(R,b)≠ø –>
((aUb) E;Ra v (aUb)Q;Ra)

Bevis: Fra hypotesene og Teorem 3.2 følger:

bQ;Ra v bE;Ra v aQ;Rb. Anta bQ;Ra. Da har man (aUb)Q;Ra ved hjelp av Teorem 3.17 og følgelig ((aUb) E;Ra v (aUb)Q;Ra). Anta bE;Ra. I lys av punkt (vi) i Teorem 3.15 har vi da (aUb)E;Ra og følgelig holder satsen også i dette tilfellet. Anta aQ;Rb. Da har man i lys av punkt (ii) i Teorem 3.15 at (aUb)E;Ra. Satsen holder for også i dette tilfellet. **Q.E.D.**

Teorem 3.19 Pref(R) & a,b Inkl D(R) & Max(R,a)≠ø & Max(R,b)≠ø –>
¬((aUb)Q;R a & (aUb)Q;Rb)

Bevis: Anta for reduktio ad absurdum at;

(1) Max(R,a)≠ø & Max(R,b)≠ø og (2) (aUb)Q;R a & (aUb)Q;Rb

Fra (1) og Teorem 3.2 har man (3) aQ;Rb v aE;Rb v bQ;Ra. Anta aQ;Rb. I lys av Teorem 3.15 har man da (aUb)E;Ra som i lys av Teorem 3.2 og (2) impliserer aQ;Ra. Men det er umulig. Anta aE;Rb. Da har man ved hjelp av Teorem 3.15 at (aUb)E;R som gir oss en absurditet på akkurat samme måte. Anta tilslutt at bQ;Ra. Ved hjelp av Teorem 3.15 følger da (aUb)E;Rb. Dette, (2) og Teorem 3.2 impliserer bQ;Rb som også er absurd. Dette viser at teoremet holder. **Q.E.D.**

Teorem 3.20 Pref(R) & a,b,c Inkl D(R) & Max(R,a)≠ø & Max(R,b)≠ø –>
((aQ;Rc v bQ;Rc) –> (aUb) Q;R c)

Bevis: Påstanden følger umiddelbart ved hjelp av Teorem 3.16. **Q.E.D.**

Teorem 3.21 Pref(R) & a,b Inkl D(R) –>.
(Max(R,a)≠ø & Max(R,b)≠ø –> Max(R, aUb)≠ø)

Bevis: Fra hypotesene følger eksistensen av z,w der zêMax(R,a) og wêMax(R,b). Er zR*w er z et maksimalt element i aUb. Dette kan man også vise i tilfelle z~;Rw. Er wR*z kan man vise at wêMax(R,aUb). Dette er gjort i detalj i beviset for Teorem 3.16. **Q.E.D.**

Vårt neste teorem er dette:

Teorem 3.22 Pref(R) & a,b,c Inkl D(R) & Max(R,a)≠ø & Max(R,b)≠ø –>
((aUb) Q;R c)–> (aQ;Rc v bQ;Rc))

Bevis: Fra de fire første hypotesene har vi i lys av Teorem 3.18 at

(1) (aUb)E;Ra v (aUb)Q;Ra og (2) (aUb)E;Rb v(aUb)Q;Rb. Vi skiller mellom fire tilfelle:

Tilfelle (i): (aUb)E;Ra & (aUb)E;Rb. I lys av den femte forutsetningen må man da åpenbart ha aQ;Rc v bQ;Rc.

Tilfelle (ii): (aUb)E;Ra & (aUb)Q;Rb. Ved hjelp av den femte forutsetningen og Teorem 3.2 har vi aQ;Rc og derfor (aQ;Rc v bQ;Rc)

Tilfelle (iii): (aUb)Q;Ra & (aUb)E;Rb. Da følger igjen ved hjelp av den femte forutsetningen og Teorem 3.2 at bQ;Rc og derfor (aQ;Rcv bQ;Rc)

Tilfelle (iv): (aUb)Q;Ra & (aUb)Q;Rb. I lys av forutsetningene i teoremet og Teorem 3.19 er dette tilfellet utelukket. **Q.E.D.**

Teorem 3.23 Pref(R) & a1,a2 Inkl D(R) & b1,b2 Inkl D(R) –>
a1Q;Rb1 & a2Q;Rb2 –> (a1Ua2)Q;R(b1Ub2)

Bevis: Anta forutsetningene i teoremet holder og dessuten at (1) a1Q;Rb1 og (2) a2Q;Rb2. I lys av Teorem 3.3 følger at (3) Max(R,a1)≠ø & Max(R,a2)≠ø. Tilsvarende for b'ene: (4) Max(R,b1)≠ø & Max(R,b2)≠ø. Fra (3) og (4) og
Teorem 3.2 følger:

(5) a1Q;Ra2 v a1E;Ra2 v a2Q;Ra1

(6) b1Q;Rb2 v b1E;Rb2 v b2Q;Rb1

I lys av (5) og (6) er det naturlig å skille mellom ni forskjellige tilfelle:

Tilfelle (i): a1Q;Ra2 & b1Q;Rb2. Fra Teorem 3.15 følger da (a1Ua2)E;Ra1 & (b1Ub2)E;Rb1. Fra dette (1) Og Teorem 3.2 følger (a1Ua2)Q;R(b1Ub2).

Tilfelle (ii): a1Q;Ra2 & b1E;Rb2. Da har man igjen ved hjelp av Teorem 3.15 at (a1Ua2)E;Ra1 og at (b1Ub2)E;Rb1. Ved hjelp av (1) og Teorem 3.2 har man også i dette tilfellet at (a1Ua2)Q;R(b1Ub2).

Tilfelle (iii): a1Q;Ra2 & b2Q;Rb1. Da har man som under Tilfelle (ii) at (a1Ua2)E;Ra1 & (b1Ub2)E;Rb2. Videre har vi siden a1Q;Ra2 sammen med (2) at a1Q;Rb2. Men da følger ved hjelp av Teorem 3.2 at (a1Ua2)Q;R(b1Ub2).

Tilfelle (iv): a1E;Ra2&b1Q;Rb2. Dette tilfellet er helt analogt med Tilfelle (ii).

Tilfelle (v): a1E;Ra2 &b1E;Rb2. Da har man ved hjelp av Teorem 3.15 at (a1Ua2)E;Ra1 & (b1Ub2)E;R b1. Fra dette og (1) følger (a1Ua2)Q;R(b1Ub2)

Tilfelle (vi): a1E;Ra2 &b2Q;Rb1. Da har man ved hjelp av Teorem 3.15 at (a1Ua2)E;Ra1 & (b1Ub2)E;Rb2. Videre har man ved hjelp av (2), siden a1E;Ra2 at a1Q;Rb2. Men da må man ha: (a1Ua2)Q;R(b1Ub2).

De tre tilfellene som gjenstår overlates til leseren. **Q.E.D.**

Teorem 3.24 Pref(R) & a,b,c Inkl D(R) & Max(R,a)≠ø &Max(R,b)≠ø –>
((aUb)E;Rc –> aE;Rc v bE;Rc)

Bevis: Fra de fire forutsetningene i teoremet har man i lys av Teorem 3.18 at:

(1) (aUb)E;Ra v (aUb)Q;Ra

(2) (aUb)E;Rb v (aUb)Q;Rb

Vi må vise at satsen holder i de følgende fire tilfelle:

Tilfelle(i): (aUb)E;Ra & (aUb)E;Rb. Da har man om (aUb)E;Rc at aE;Rc. Satsen holder derfor i dette tilfellet.

Tilfelle (ii): (aUb)E;Ra & (aUb)Q;Rb. Påstanden følger da på akkurat samme måte som i forrige tilfelle.

Tilfelle (iii): (aUb)Q;Ra & (aUb)E;Rb. Har man i da (aUb)E;Rc følger umiddelbart bE;Rc og derfor aE;Rc v bE;Rc.

Tilfelle (iv): (aUb)Q;Ra & (aUb)Q;Rb. I lys av forutsetningene i teoremet og Teorem 3.19 er dette tilfellet utelukket. **Q.E.D.**

Teorem 3.25 Pref(R) & a,b,c Inkl D(R) & Max(R,a)≠ø &Max(R,b)≠ø –>
Max(R,aΩb)≠ø –> ((aΩb)Q;Rc –> aQ;Rc Ω bQ;Rc)

Bevis: Vi har i følge Teorem 3.15 at ¬((aΩb)Q;Ra). Anta Max(R,aΩb)≠ø. I lys av dette, de fire første forutsetningene samt Teorem 3.2 har man:

(2) (aΩb)Q;Ra v (aΩb)E;Ra v aQ;R(aΩb)

(1) og (2) gir en: (3) (aΩb)E;Ra v aQ;R(aΩb) som i nærvær av ((aΩb)Q;Rc), forutsetninger og Teorem 3.2 impliserer aQ;Rc. Ved hjelp av Teorem 3.15 og Teorem 3.2 har vi også på samme måte som rett ovenfor at :

(4) (aΩb)E;Rb v bQ;R(aΩb). Men fra dette og (aΩb)Q;Rc følger fra dette at bQ;Rc. **Q.E.D.**

Teorem 3.26 Pref(R) & a,b Inkl D(R) & Max(R,aΩb)≠ø –>
(aQ;Rb –> (a–b)Q;R(aΩb))

Bevis: Fra Max(R, aΩb)≠ø & aQ;Rb følger ved hjelp av Teorem 3.15 at

(a–b)E;Ra & aQ;R(aΩb). Dette og Teorem 3.2 gir en (a–b)Q;R(aΩb). **Q.E.D.**

Merk at vi ikke kan ha aQ;Rc & bQ;Rc –> (aΩb)Q;Rc selv med de hypotesene som er oppført i Teorem 3.26. Det er en enkel øvelse å vise dette.

Teorem 3.27 Pref(R) & a,b Inkl D(R) –> ((a–b)Q;Rb –> aQ;Rb)

Bevis: Anta forutsetningene holder og at (a–b)Q;Rb. Da finnes det elementer x1, x2 som oppfyller de følgende betingelser:

(1) x1êMax(R,a–b) (2) x2êMax(R,b) og (3) x1R*x2

Fra (1) følger:

(4) x1ê(a–b) og

(5) (Ay)(yê(a–b) &yRx1 –> x1Ry)

Anta for vilkårlig y at (6) yêa &yRx1. (6) og (3) impliserer yR*x2. Dette og (2) gir oss ¬(yêb). Fra dette og (6) kan man slutte yê(a–b). Dette (6) og (5) impliserer x1Ry. Siden y var et vilkårlig element har vi nå vist:

(Ay)(yê(b–a) &yRx1 –> x1Ry) som sammen med (4) gir oss x1êMax(R.a). Dette, (2), (3) samt Definisjon 3.1 impliserer aQ;Rb. **Q.E.D.**

Teorem 3.28 Pref(R) & a,b Inkl D(R) & I = D(R) –> (aQ;Rb –> ¬(aQ;R(I–b)))

Bevis: Anta at forutsetningene holder og at (1) aQ;Rb. Anta for reduktio ad absurdum at (2) aQ;R(I–b). I lys av (1) og Teorem 3.15 har man (3) (a–b)E;Ra. (3) impliserer at Max(a–b)≠ø. Dette, (2) og Teorem 3.15 gir en aQ;R(a–b) som sammen med (3) og Teorem 3.2 impliserer aQ;Ra. Dette er umulig. **Q.E.D.**

Teorem 3.29 Pref(R) & a,b Inkl D(R) & I = D(R) & Max(R,I–b)≠ø –>
(aQ;Rb –> ((I–b)Q;Ra v (I–b)E;Ra)

Bevis: Umiddelbar konsekvens av Teorem 3.28, Teorem 3.2 samt Teorem 3.3.
Q.E.D.

Teorem 3.30 Pref(R) & a,b Inkl D(R) & I = D(R) & Max(R,I–b)≠ø –>
(aQ;Rb –> (I–b)Q;Rb)

Bevis: Anta forutsetningene holder og at aQ;Rb. Ved hjelp av Teorem 3.29 følger da ((I–b)Q;Ra v (I–b)E;Ra) & aQ;Rb. Dette og Teorem 3.2 impliserer at (I–b)Q;Rb. **Q.E.D.**

Teorem 3.31 Pref(R) & a,b Inkl D(R) & Max(R,a–b)≠ø & Max(R,a)≠ø –>
(Max(R,a) Inkl b <–> (aΩb)Q;R(a–b))

Bevis: (a) Anta de to første forutsetningene holder og at

(1) Max(R,a–b)≠ø & Max(R,a)≠ø. Anta dessuten (2) Max(R,a) Inkl b. Fra (1) følger eksistensen av noe x1 der (3) x1êMax(R,a). Fra dette og definisjonen av Max-operatoren kan man utlede: (4) x1êa & (Ay)(yêa &yRx1 –> x1Ry). I lys av (3) og (2) impliserer dette:

(5) x1êaΩb & (Ay)(yêaΩb & yRx1 –> x1Ry).

Fra (5) følger etter definisjonen av Max at (6) x1êMax(R, aΩb). Fra (1) følger eksistensen av noe x2 der man har:

(7) x2ê(a–b) & (Ay)(yê(a–b) & yRx2 –> x2Ry).

Det vil være tilstrekkelig å bevise x1R*x2. Anta derfor for reduktio ad absurdum at (+) x1~;R x2 v x2R*x1. Tilfelle (i): x1~;R x2. Da har vi i kraft av (3) at x2êMax(R,a) og derfor ved hjelp av (2) at x2êb. Men dette strider mot (7). Dette tilfellet er derfor utelukket. Tilfelle (ii): x2R*x1. Siden x2êa har vi da i lys av (4) at x2Rx1 –> x1Rx2. Men dette strider umiddelbart mot antagelsen om at x2R*x1. (+) leder altså til absurditeter i alle tilfelle. Dette innebærer at 1R*x2. Dette viser at kondisjonalen mot høyre i konsekventen i teoremet holder.

(b) Anta (aΩb)Q;R(a–b). Da finnes det x1 og x2 der vi har:
(1) x1êMax(R,aΩb) og (2) x2êMax(R, a–b) og der (3) x1R*x2. Anta nå for reduktio ad absurdum at det finnes x0 som oppfyller den følgende betingelse:

(4) x0êMax(R,a) & ¬(x0êb).

Fra (1) og (2) har man:

(5) x1êaΩb & (Ay)(yêaΩb &yRx1 –> x1Ry)

(6) x2ê(a–b) & (Ay)(yê(a–b) &yRx2 –> x2Ry)

Fra (4) følger x0ê(a–b). Derfor har vi ved hjelp av (6) at x0Rx2 –> x2Rx0. Dette impliserer siden R er en preferanserelasjon at (7) x0~;R x2 v x2R*x0. Dette og (3) impliserer (8) x1R*x0. Fra (4) har vi:

(9) x0êa & (Ay)(yêa & yRx0 –> x0Ry). Nå følger fra (5) at x1êa og derfor sammen med (9) at x1Rx0 –> x0Rx1. Men dette strider åpenbart mot (8). Det kan altså ikke finnes x0 der (4) holder. Det følger at Max(R,a) Inkl b. Dette viser at kondisjonalen mot venstre i konsekventen i teoremet holder.

Dermed er satsen fullstendig bevist. **Q.E.D.**

Vi definerer en relasjon C;R ved:

Definisjon 3.32 C;R(b,a) <–> (Max(R,a) Inkl b)

Ved hjelp av denne definisjonen kan Teorem 3.31 reformuleres til:

Teorem 3.33 Pref(R) & a,b Inkl D(R) & Max(R,a–b)≠ø & Max(R,a)≠ø –>
(C;R(b,a) <–> (aΩb)Q;R(a–b))

Bevis: Dette følger direkte fra Teorem 3.31 og Definisjon 3.32. **Q.E.D.**

Vi er nå interessert i å studere et relasjonspar Q;<R,a> og E;<R,a> om vi innfører ved den følgende definisjon:

Definisjon 3.34 (i) b1Q;<R,a>b2 <–>
(Ex1)(Ex2)(x1êMax(R,aΩb1) & x2êMax(R,aΩb2) & x1R*x2)
(i) b1E;<R,a>b2 <–>
(Ex1)(Ex2)(x1êMax(R,aΩb1) & x2êMax(R,aΩb2) & x1~;Rx2)

Fra denne definisjonen, samt Definisjon 3.1 har man umiddelbart:

Teorem 3.35 Anta Pref(R) & a,b1,b2 Inkl D(R) Da gjelder:

(i) b1Q;<R,a>b2 <–> b1Ωa Q;R b2Ωa

(i) b1E;<R,a>b2 <–> b1Ωa E;R b2Ωa

I lys av de to relasjonene vi har innført nå kan Teorem 3.28 også reformuleres slik:

Teorem 3.36 Pref(R) & a,b Inkl D(R) & Max(R,a–b)≠ø & Max(R,a)≠ø –>.
I=D(R) –>(C;R(b,a) <–> bQ;<R,a>(I-a))

Siden Definisjon 3.34 i visse henseende er analog med Definisjon 3.1 er det mulig å vise at relasjonsparet <Q;<R,a>, E;<R,a>> har egenskaper som ligner på relasjonsparet <Q;R,E;R>. Vi vil i det følgende utvikle en teori om egenskapene til relasjonene i paret <Q;<R,a>, E;<R,a>>:

Teorem 3.37 Anta Pref(R) & a,b1,b2, b3 Inkl D(R). Da gjelder:

(i) ¬(b1 Q;<R,a> b1)

(ii) b1 Q;<R,a> b2 –> ¬(b2 Q;<R,a> b1)

(iii) b1 Q;<R,a> b2 & b2 Q;<R,a> b3 –> b1 Q;<R,a> b3

(iv) Max(R,aΩb1)≠ø & Max(R, aΩb2)≠ø –>
b1Q;<R,a>b2 v b1E;<R,a> b2 v b2Q;<R,a>b1

(v) Max(R,aΩb1)≠ø –> b1E;<R,a> b1

(vi) b1E;<R,a> b2 –> b2E;<R,a> b1

(vii) b1E;<R,a> b2 & b2E;<R,a> b3 –> b1E;<R,a> b3

(viii) b1E;<R,a> b2 –> b1Q;<R,a>b3 –> b2Q;<R,a>b3

(ix) b1E;<R,a> b2 –> b3Q;<R,a>b1 –> b3Q;<R,a>b2

Bevis: Teoremet følger ved hjelp av Teorem 3.35 og Teorem 3.2. **Q.E.D.**

Teorem 3.38 Pref(R) & a,b,c Inkl D(R) –> (aQ;<R,c>b –> (a–b)Q;<R,c>b)

Bevis: Satsen følger ved å benytte Teorem 3.6 og Teorem 3.35. **Q.E.D.**

Teorem 3.39 Pref(R) & a,b,c Inkl D(R) –> (aQ;<R,c>b –> (aUb)E;<R,c>a)

Bevis: Dette følger ved hjelp av Teorem 3.35 og Teorem 3.7. **Q.E.D.**

Teorem 3.40 Pref(R) & a,b,c Inkl D(R) & Max(R,aΩbΩc)≠ø –>
(aQ;<R,c>b –> (aE;<R,c>(aΩb))

Bevis: Dette følger ved hjelp av Teorem 3.8 og Teorem 3.35. **Q.E.D.**

Teorem 3.41 Pref(R) & a,b,c Inkl D(R) –> (aQ;<R,c>b –> (a–b)E;<R,c>a)

Bevis: I kraft av Teorem 3.9 har vi under forutsetningene i satsen at:
(aΩc)Q;R(bΩc) –> ((aΩc)–(bΩc)) E;R (aΩc). Men:
(aΩc)–(bΩc) = (a–b)Ωc. Fra dette følger så satsen ved hjelp av Teorem 3.35.
Q.E.D.

Teorem 3.42 Pref(R) & a,b,c Inkl D(R) –> ¬((bΩa)Q;<R,c>b)

Bevis: Teoremet følger ved å benytte Teorem 3.10 og Teorem 3.35. **Q.E.D.**

Teorem 3.43 Pref(R) & a,b,c Inkl D(R) & Max(R,(D(R)–a)ΩbΩc)≠ø –>
(aQ;<R,c>b –> (aQ;<R,c>(b–a))

Bevis: Satsen følger lett ved hjelp av Teorem 3.12 og Teorem 3.35. **Q.E.D.**

Teorem 3.44 Pref(R) & a,b,c Inkl D(R) –> (aE;<R,c>b –> aE;<R,c>(aUb))

Bevis: Fra forutsetningene og Teorem 3.13 følger:
(aΩc)E;R(bΩc) –> (aΩc)E;R((aΩc)U(bΩc)). Men ((aΩc)U(bΩc)) = ((aUb)Ωc).
Satsen følger fra dette samt Teorem 3.35. **Q.E.D.**

Teorem 3.45 Pref(R) & a,b,c,d Inkl D(R) & Max(R,cΩd)≠ø –>
(aQ;<R,d>b) –> (aUc)Q;<R,d>b)

Bevis: Her følger satsen lett ved hjelp av Teorem 3.16 og Teorem 3.35. **Q.E.D.**

Teorem 3.46 Pref(R) & a,b,c Inkl D(R) –> (aQ;<R,c>b –> (aUb)Q;<R,c>b)

Bevis: Satsen følger ved hjelp av Teorem 3.17 og Teorem 3.35. **Q.E.D.**

Vår neste oppgave er å gi bevis for den følgende sats som inneholder en del viktige egenskaper ved relasjonen C;R der R er en preferanserelasjon. Dette teoremet er temmelig viktig og vil bli benyttet senere.

Teorem 3.47 Anta Pref(R) og a,b,c Inkl D(R) & I = D(R). Da gjelder følgende:

(i) Max(R,b)≠ø –> (C;R(a,b) –> ¬C;R(I–a,b))
(ii) C;R((I–a)Ub,c) & C;R(a,c) –> C;R(b,c)
(iii) C;R(D(R),c)
(iv) a Inkl b –> (C;R(a,c) –> C;R(b,c))
(v) a Inkl b –> C;R(b,a)
(vi) Max(R,a)≠ø –> ¬C;R((I–a),a)
(vii) C;R(a,a)
(viii) C;R(a,bΩc) –> C;R(aU(I–c),b)
(ix) C;R(aUb,c) –>(¬C;R(b,c). –> C;R(a,cΩ(I–b)))
(x) C;R(a,b) & C;R(a,c) –> C;R(a,bUc)
(xi) C;R(a,bUc) –> C;R(a,b) v C;R(a,c)
(xii) C;R(a,c) &C;R(b,aΩc) –> C;R(aΩb,c)
(xiii) Max(R,c)≠ø –> (C;R(aΩb,c) –> C;R(a,bΩc))
(xiv) C;R(a,c) & ¬C;R(I–b,c) –> C;R(a,bΩc)
(xv) Max(R,b)= ø –> C;R(a,b)

Bevis: Punkt (i) – (vii), samt (xv) er temmelig opplagte og lette å gi bevis for. Når det gjelder disse delene av teoremet overlater vi derfor bevisene til leseren.

Ad (viii): Anta forutsetningene i teoremet holder og at:
(1) Max(R,bΩc) Inkl a. Vi ønsker å vise at Max(R, b) Inkl aU(I–c). Anta derfor for vilkårlig x at (2) xêMax(R,b). Vi skiller mellom to tilfeller:

Tilfelle (1): xêMax(R,bΩc). Da har vi trivielt ved hjelp av (1) at xêa Inkl aU(I–c). Satsen holder derfor i dette tilfellet.

Tilfelle (2): ¬(xêMax(R,bΩc). Dette impliserer i lys av definisjonen av Max-operasjonen at (3) xê(bΩc) –> (Ey)(yê(bΩc) & yRx & ¬(xRy)). Det er nå gunstig å skille mellom to undertilfelle: (a) xê(I–c). Da har vi åpenbart at xê(I–c) Inkl aU(I–c). Satsen holder derfor i dette tilfellet. (b) xêc. Da har vi ved hjelp av (2) og (3) at det må finnes y0 slik at y0êb & y0Rx & xRy0. Men dette strider åpenbart mot (2). Dette avslutter beviset for punkt (viii).

Ad (ix): Anta forutsetningene i satsen holder og dessuten at:
(1) Max(R,c) Inkl aUb og (2) ¬(Max(R,c) Inkl b). Vi ønsker å vise at følgende er tilfelle: Max(R, cΩ(I–b)) Inkl a. Imidlertid er det tilstrekkelig, i lys av (1), å bevise : Max(R,cΩ(I–b)) Inkl Max(R,c)Ω(I–b). Men siden Max(R,cΩ(I–b) er inkludert i (I–b) er det nok å vise (+) Max(R,cΩ(I–b)) Inkl Max(R,c). Anta derfor for vilkårlig x at: (3) xêMax(R, cΩ(I–b)). Da følger:

(4) xêcΩ(I–b) & (Ay)(yêcΩ(I–b) & yRx –> xRy). Fra (2) følger at det eksisterer et element x0 med følgende egenskaper:

(5) x0êc &(Ay)(yêc & yRx0 –> x0Ry) & ¬(x0êb). Vi må nå vise at xêMax(R,c). Anta derfor for vilkårlig y at (6) yêc & yRx. Vi sondrer mellom to hovedtilfeller:

Tilfelle (1): ¬(yêb). Da har vi ved hjelp av (4) og (6) at xRy.

Tilfelle (2): yêb. Vi sondrer da mellom tre undertilfelle: (a) x~;R x0. Da har man ved hjelp av (5) og (6) at yRx –> xRy og derfor ved hjelp av (6) at xRy.
(b) xR*x0. Siden xêc i følge (4) følger det fra (5) at xRx0 –> x0Rx. Men xR*x0. Dette tilfellet er derfor utelukket. (c) x0R*x. Siden x0êcΩ(I–b) i lys av (5) har man ved hjelp av (4) x0Rx –> xRx0. Men dette er umulig siden vi antar x0R*x. Følgelig er også dette tilfellet utelukket.

I begge hovedtilfellene har man altså xRy. Men y var et vilkårlig element der (6) holdt. Det følger at (Ay)(yêc & yRx –> xRy). Siden xêc i kraft av (4) følger derfor xêMax(R,c). Men var et vilkårlig element der (3) holdt. Dette innebærer at Max(R, cΩ(I–b)) Inkl Max(R,c). Dette avslutter beviset for punkt (ix).

Ad (x): Man må bevise:
Max(R,b) Inkl a & Max(R,c) Inkl a –> Max(R,bUc) Inkl a
under forutsetningene i teoremet. Det er åpenbart tilstrekkelig å bevise:

Max(R, bUc) Inkl (Max(R,b)U Max(R,c)).
Anta derfor for vilkårlig x at xêMax(R,aUb). Dette impliserer i lys av definisjonen av Max at: (1) xêbUc & (Ay)(yê(bUc) & yRx –> xRy).

Tilfelle (1): xêb. Er da y et vilkårlig element i b der yRx følger umiddelbart ved hjelp av den andre konjunkten i (1) at xRy. Dette viser at xêMax(R,b) og defor at xêMax(R,a)UMax(R,b). Satsen holder derfor i dette tilfellet.

Tilfelle (2): xêc. Dette tilfellet blir helt analogt. Dette avslutter beviset for punkt (x).

Ad (xi): For å bevise denne påstanden er det tilstrekkelig å godtgjøre at Max(R,b)U Max(R,c) Inkl Max(R, bUc). Dette er det imidlertid lett å vise om man benytter definisjonen av operatoren Max.

Ad (xii). Anta forutsetningene i teoremet holder. Anta videre at:
(1) Max(R,c) Inkl a & Max(R, aΩc) Inkl b. Det vil være tilstrekkelig å bevise:
(+) Max(R,c) Inkl aΩb. Man ser at den ene halvdelen av (+) umiddelbart er implisert av (1). Anta nå for reduktio ad absurdum at det finnes en x med følgende egenskaper:

(2) xêMax(R,c) og (3) ¬(xêb). Fra (2) følger:
(4) xêc & (Ay)(yêc & yRx –> xRy). Fra (3) og (1) har man: ¬(xêMax(R,aΩc)). Dette impliserer: (5) xê(aΩc) –> (Ey)(yê(aΩc) & yRx & ¬(xRy)). Fra (1) og (2) har man xê(aΩc) og derfor i lys av (5) at det finnes noe y0 der:

(6) y0ê(aΩc) & y0Rx &¬(xRy0). Fra (6) følger y0êc og derfor i lys av (4) at y0Rx –> xRy0. Men dette strider åpenbart mot (6). Det følger at det ikke kan finnes x som oppfyller kravene (2) og (3). Man har derfor Max(R,c) Inkl b. Dette viser at punkt (xii) holder.

Ad (xiii): Anta forutsetningene i teoremet holder og at:
(1) ø≠Max(R,c) Inkl (aΩb). Vi ønsker å vise at Max(R, bΩc) Inkl a. Anta derfor for reduktio ad absurdum at det finnes x der man har:

(2) xêMax(R, bΩc) og (3) ¬(xêa).
Fra (3) har man ¬(xê(aΩb) og derfor ved hjelp av (1) at ¬(xêMax(R,c). Dette impliserer (4) xêc –> (Ey)(yêc & xRy &¬(yRx)). Fra (2) følger xê(bΩc) og derfor xêc. Sammen med (4) impliserer dette at det må finnes noe y0 der vi har:

(5) y0êc & xRy0 & y0Rx. Fra (1) følger eksistensen av z0 der:

(6) z0êc & (Ay)(yêc &yRz0 –> z0Ry). Vi sondrer nå mellom tre tilfeller:
Tilfelle (1): z0~;R y0. Fra (2) har man:

(7) (Ay)(yê(bΩc) & yRx –> xRy). Siden z0êMax(R,c) har vi i lys av (1) at z0ê(bΩc). Derfor har man ved hjelp av (7) at z0Rx –> xRz0. Siden z0~;R y0 har vi herav y0Rx –> xRy0 som strider mot (5). Dette tilfellet er derfor utelukket.
Tilfelle (2): z0R*y0. Da har man siden y0Rx at (8) z0R*x. Men z0êMax(R,c) og derfor har vi i lys av (1) at z0ê(bΩc). I lys av (2) som impliserer

(Ay)(yê(bΩc) & yRx –>xRy) følger derfor z0Rx –> xRz0. Men dette strider åpenbart mot (8). Også dette tilfellet er derfor utelukket.
Tilfelle (3): y0R*z0. Fra (5) og (6) har vi imidlertid y0Rz0 –> z0Ry0. Men dette strider mot y0R*z0. Følgelig er også dette tilfellet helt umulig.

Siden alle tilfellene er umulige innebærer dette at det ikke kan finnes x der (2) og (3) holder. Det må derfor være slik at Max(R,bΩc) Inkl a. Dette avslutter beviset for punkt (xiii).

Ad (xiv): Siden a Inkl aU(I–b) har vi i lys av punkt (iv) og (ix), i det vi setter (I–b) istedet for b i (iv) at:

C;R(a,c) –> (¬(C;R(I–b),c)) –> C;R(a,cΩb)). Men dette er ekvivalent med (xiv) siden cΩb = bΩc.

Dette avslutter vårt bevis for Teorem 3.47. **Q.E.D.**

Vi har nå fullført fremstillingen av den generelle teorien om preferanse-relasjoner som vi trenger i det følgende. La oss bemerke et par aspekter ved denne teorien. Siden alle begrepene som er introdusert i dette avsnittet er definert ved rent eksplisitte mengdeteoretiske definisjoner og vi ikke har benyttet noen prinsipper i bevisene som ikke er utledbare i ZF følger det at alle teoremene er teoremer i ZF. De kan naturligvis også utledes innenfor rammen av en hvilket som helst rimelig mengdeteoretisk system. Siden ZF er en del av TA* følger det også at disse teoremene er satser i T;A*.

Vår neste oppgave er å anvende denne teorien ved et nærmere studium av en familie med preferanselogiske systemer. Vi går nå over til å gjøre rede for dem. Dette skjer i det neste avsnittet.

Avsnitt B

§1 Innledning.

Hovedformålet med dette avsnittet er å gi en detaljert beskrivelse av en familie med preferanselogiske systemer. For å kunne gjennomføre denne oppgaven beskrives først de språk som vil bli benyttet i det følgende.

Vi tenker oss at L;D er en intensjonal språkstruktur som oppfyller de følgende krav:

(i) Cd(P;<0,0,0>(L;D)) = Aleph;0
(ii) Cd(P;<0,0,1>(L;D)) = 4
(iii) Cd(P;<0,0,2>(L;D)) = 4
(iv) Cd(P;<0,0,3>(L;D)) = 2
(v) (Am)(An)(Ak)(m,n,kêN & ¬(<m,n,k>ê{<0,0,n>: 0≤n≤3}) –>
(P;<m,n,k>(L;D)=ø & C;<m,n,k>(L;D) =ø))

Det finnes naturligvis uendelig mange intensjonale språkstrukturer som oppfyller kravene (i) – (v). L;D er i dette og senere avsnitt en helt fiksert slik struktur som man må tenke seg valgt ut en gang for alle. Fra de kravene som L;D må oppfylle, og som er nevnt ovenfor, fremgår det at dette språket inne-holder tellbart uendelig mange utsagnskonstanter (setningsvariabler). Videre
inneholder det nøyaktig fire unære formeldannende konnektiver, nøyaktig fire binære formeldannende konnektiver og endelig to ternære formeldannende konnektiver. Språket inneholder ingen andre konstruksjoner. Vi betegner de fire konnektivene i P;<0,0,1>(L;D) med "¬", "Nec", "Tg" og "O". De fire konnektivene i P;<0,0,2>(L;D) betegner vi med "–>", "Ekv","Pr" og "E". Tilslutt betegner vi elementene i P;<0,0,3>(L;D) med "Ekv;c" og "Pr;c". Det er hensikten at "¬" skal oppfattes som et klassisk negasjonskonnektiv og at "–>" er en vanlig materiel implikasjonsoperator. L;D er altså et rent setningslogisk språk siden det ikke inneholder kvantorer, identitet, predikater eller funksjonssymboler av forskjellig grad.

Vi skal ta i betraktning tre andre intensjonale språkstrukturer som vi får fra L;D ved å fjerne visse konstruksjoner. Disse språkstrukturene er definert på følgende vis:

L;C er den strukturen man får fra L;D ved å fjerne konstruksjonene Tg og O. Videre er L;B den intensjonale språkstrukturen man får fra L;C ved å fjerne konstruksjonene Ekv;c og Pr;c. Endelig er L;A den intensjonale språkstrukturen som fås fra L;B ved at man fjerner konstruksjonen E. Dermed skulle vi ha gitt en nøyaktig angivelse av de språkene som vil bli betraktet i dette avsnittet.

I de følgende paragrafer vil vi gi en syntaktisk og semantisk beskrivelse av 16 distinkte preferanselogiske systemer. Vi vil først beskrive fire hovedsystemer som vi gir navnene P0 – P3. I Avsnitt C vil vi gi bevis for at alle systemene er fullstendige.

§2 Det preferanselogiske systemet P0

P0 er et formalt system over språkstrukturen L;A i den betydning av uttrykket "formalt system" som ble innført i Del I. Systemet er entydig bestemt ved at man angir språket til det, hvilke formler i språket som er aksiomer og hvilke slutningsregler som inngår i det. Som nevnt er språket til P0 språkstrukturen L;A. I denne forbindelse nevner vi at siden bare har ¬ og –> som primitive setningslogiske konstrukjoner i L;A innføres &, v og <–> ved de helt vanlige standarddefinisjoner:

(i) FvG <–> ((¬F) –> G)
(ii) F&G <–> ¬((¬F) v(¬G))
(iii) (F <–> G) <–> ((F–>G) & (G –>F))

Aksiomene i systemet P0 faller i tre klasser, nemlig de setningslogiske aksiomene, de modale aksiomene og de preferanselogiske aksiomene. De setningslogiske aksiomene er alle instanser av de følgende skjemaer der F,G og H representerer formler i L;A:

U1 F –> (G–> F)
U2 ((¬F) –>(¬G)) –> (G –> F)
U3 (F–>(G –>H)) –>((F–>G) –> (F –>H))

De modale aksiomene er det følgende vanlige aksiomsett for modalsystemet S5:

M1 Nec(F) –> F
M2 Nec(F –>G) –> (Nec(F) –> Nec(G))
M3 Nec(F) –> Nec(Nec(F))
M4 (¬Nec(¬F)) –> Nec(¬Nec(¬F))

Her er F og G selvfølgelig formler i L;A. Det bemerkes at vi i det følgende bruker "Pos(F)" som forkortelse for "¬Nec(¬F)". Tilslutt nevner vi de preferanselogiske aksiomene i P0 som er alle formler av følgende type der F,G,HêFm(L;A):

PE1 Pr(F,G) & Pr(G,H) –> Pr(F,H)
PE2 Pr(F,G) –> ¬Pr(G,F)
PE3 ¬Pr(F,F)
PE4 Ekv(F,G) & Ekv(G,H) –> Ekv(F,H)
PE5 Ekv(F,G) –> Ekv(G,F)
PE6 Pos(F) –> Ekv(F,F)
PE7 Ekv(F,G) & Pr(F,H) –> Pr(G,H)
PE8 Ekv(F,G) & Pr(H,F) –> Pr(H,F)
PE9 Pos(F) & Pos(G) –> (Pr(F,G) v Ekv(F,G) v Pr(G,F))
PE10 (Pr(F,G) v Ekv(F,G)) –> (Pos(F) & Pos(G))
PE11 Pos(F) –> (Ekv(Gv¬G,F) v Pr(Gv¬G,F))
PE12 Pr(F,G) –> Pr(F&¬G,G)

Dermed skulle vi helt rigorøst ha definert aksiomene i P0. Klassen av aksiomer i P0 skal vi her betegne med "Ax(P0)".

Slutningsreglene i P0 kan angis på den følgende måte i det vi bruker "Th(F)" som forkortelse for "F er et teorem":

R1 Modus ponens: Th(F) & Th(F–>G) –> Th(G)
R2 Modal generalisering: Th(F) –> Th(Nec(F))
R3 Substitusjon av bevisbare ekvivalenter:
Er F og G formler der F er som G untatt eventuelt å ha en forekomst av formelen H1 på et eller flere steder hvor G har en forekomst av formelen H2 gjelder:
Th(H1 <–>H2) –> Th(F<–> G)

Siden vi nå har definert språket, aksiomene og slutningsreglene i P0 har vi gitt en fullstendig definisjon av systemet P0.

Klassen av teoremer i P0 – vi skal betegne denne med "Tm(P0)" – er som man kanskje skulle vente definert som den minste mengden X Inkl Fm(L;A) som inneholder Ax(P0) og som er lukket under slutningsreglene R1, R2 og R3. Er FêFm(L;A) skriver vi "Th(P0, F)" i stedet for "F er en formel som er et teorem i P0".

§3 Modellteori for P0.

Den neste oppgaven er å formulere en modellteori for systemet P0. I denne forbindelse skal vi først gjøre rede for hva vi her vil forstå med en modellstruktur, en L;A-valuasjon over en modellstruktur og en L;A-modell.

Vi tar først for oss uttrykket "modellstruktur":

Definisjon 3.1 Med en modellstruktur forstår vi en struktur
S=<W, <R;w>/wêW/>
der komponentene oppfyller de følgende to krav:
(i) W≠ø
(ii) For alle wêW er R;w en total preordning over w, med andre ord krever vi: (Aw)(wêW –>. Pref(R;w) & D(R;w) = W)
Vi bruker "MS(x)" som forkortelse for "x er en modellstruktur".

Det kan bemerkes at Mg(x: MS(x)) er en ekte mengde. Den er så og si "for stor" til å kunne eksistere i det kumulative mengdehierarkiet. Vi minner også om at dersom S=<W, <R;w>/wêW/> så er (S);2(w) = R;w for alle wêW.

Hva som menes med en L;A-valusjon over en modellstruktur og hva som menes med en L;A-modell er forklart i denne definisjonen:

Definisjon 3.2 La S= <W, <R;w>/wêW/> være en modellstruktur.
(i) Med en L;A-valuasjon over S forstår vi en funksjon V der
Dom(V) = P;<0,0,0>(L;A) & Rgn(V) Inkl Pt(W)
Dette innebærer at en L:A-valuasjon over S er en funksjon som tilordner alle setningsbokstavene i L;A delmengder av W.
(ii) En L;A-modell er et triple M=<W, <R;w>/wêW/,V> der

S=<W, <R;w>/wêW/> er en modllstruktur og V en L;A-valuasjon over modellstrukturen S. Vi bruker "Mod(L;A,x)" som forkortelse for uttrykket "x er en L;A-modell".

Også i forbindelse med denne definisjonen kan det bemerkes at Mg(x: Mod(L;A,x)) er en såkalt "ekte mengde".

Vi går nå over til å forklare hva som menes med at en formel F er sann ved indekspunktet w i modellen M relativt til L;A. Dette gjøres ved den følgende definisjon:

Definisjon 3.3 La M være en L;A-modell der M=<W, <R;w>/wêW/,V>. Vi definerer da uttrykket "True(F,w,M,L;A)", som leses "Formelen F er sann ved indekspunktet w i modellen M relativt til L;A", ved den følgende induktive definisjon på lengden av formler i L;A:

(i) Er FêP;<0,0,0>(L;A) –> (True(F,w,M,L;A) <–> wêV(F))

(ii) Er F=(¬G) der GêFm(L;A) har man at:
True(F,w,M,L;A) <–> ¬True(G,w,M,L;A)

(iii) Er F=(G–>H) der G,HêFm(L;A) har man at:
True(F,w,M,L;A) <–> (True(G,w,M,L;A) –>True(H,w,M,L;A))

(iv) Er F= Nec(G) der GêFm(L;A) har man at:
True(F,w,M,L;A) <–> (Ay)(yêW –> True(G,y,M,L;A))

(v) Er F= Pr(G,H) der G;HêFm(L;A) har man at:
True(F,w,M,L;A) <–> x1 Q;(R;w) x2 hvor:
x1 = Mg(w: True(G,w,M,L;A)) og
x2 = Mg(w: True(H,w,M,L;A))

(vi) Er F= Ekv(G,H) der G;HêFm(L;A) har man at:
True(F,w,M,L;A) <–> x1 E;(R;w) x2 hvor:
x1 = Mg(w: True(G,w,M,L;A)) og
x2 = Mg(w: True(H,w,M,L;A))

Merk at vi sløyfer språkparameteren "L;A" i "True(F,w,M,L;A) " og skriver i stedet "True(F,w,M)" når det går klart frem av konteksten hvilket språk det er vi har i tankene.

Sannhetsmengden til en formel F i språket L med hensyn på modellen M er definert på den følgende måte:

Definisjon 3.4 Er M=<W, <R;w>/wêW/,V> en L;A-modell og FêFm(L;A) setter vi:
Sm;<L;A,M>(F) = Mg(w: True(F,w,M,L;A))

Vi kaller Sm;<L;A,M>(F) for sannhetsmengden til formelen F i L;A med hensyn på modellen M. Som man ser er dette klassen av alle de w i modellen M hvor vi har at F er sann. Når det er klart hvilket språk det er vi betrakter vil vi sløyfe språkparameteren "L" i uttrykket "Sm;<L,M>(F)" og i stedet bare skrive: "Sm;M(F)".

Den neste definisjonen introduserer termen "P0-modell":

Definisjon 3.5 Er M=<W, <R;w>/wêW/,V> en L;A-modell så er M en P0-modell hvis og bare hvis M oppfyller de følgende to krav:

(K1) (Aw)(wêW –> Max(R;w,W)≠ø)

(K2) (AF)(FêFm(L;A) & Sm;<L;A,M>(F)≠ø .–>

(Aw)(wêW –> Max(R;w, Sm;<L;A,M>(F))≠ø)

Vi bruker "P0Mod(x)" som forkortelse for uttrykket "x er en P0-modell".

De to kravene K1 og K2 er meget sterke. K1 innebærer at W inneholder R;w-maksimale elementer for alle wêW. K2 sier at Sm;<L;A,M>(F) inneholder R;w-maksimale elementer for alle wêW forutsatt at den er ikke-tom. Det er ikke på noen måte klart at disse to kravene er fornuftige. De innføres her av rent tekniske grunner. Vi vil senere se på preferanselogiske systemer der disse to kravene ikke er oppfylt.

Tilslutt definerer vi P0-gyldighet til en formel F ved den følgende definisjon.

Definisjon 3.6 En formel F er P0-gyldig i symboler Val;P0(F) hvis og bare hvis den oppfyller de følgende krav:

(i) FêFm(L;A)

(ii) (AM)(Aw)(P0Mod(M) & wê(M);1 –> True(F,w,M,L;A))[2]

Vi har nå gitt en eksplisitt redegjørelse for de begreper i modellteorien for P0 som vi trenger her.

Det er nå ikke vanskelig å vise at gyldighetsteoremet gjelder for P0. Man kan formulere dette slik om man bruker "Th(S,F)" som forkortelse for "Formelen F er et teorem i systemet S":

Teorem 3.7 Er FêFm(L;A) –> (Th(P0, F) –> Val;P;0(F))

Beviset for dette er svært rutinepreget. Av plasshensyn gir vi det ikke i detalj, men overlater oppgaven til leseren. Man verifiserer først at alle P0-aksiomene er P0-gyldige og dernest at slutningsreglene R1 – R3 bevarer gyldighet. I det neste avsnittet vil vi også vise at det omvendte holder: Er en formel P0-gyldig er den også et teorem i P0.

Det følgende teorem gir en en oversikt over noen viktige formler i L;A som er P0-gyldige. Siden P0 – som vi skal vise – er fullstendig følger det at de er deriverbare i P0.

Teorem 3.8 Anta F,G,H,J er formler i L;A. Da har man Val;P0(S), med andre ord at S er P0-gyldig, om S er en av formlene på den følgende liste:

(i) Pr(F,G) –> Ekv(FvG, F)
(ii) Pr(F,G) –> (Pos(F&G) –> Pr(F,F&G))
(iii) Pr(F,G) –> Ekv(F&¬G,F)
(iv) ¬(Pr(F&G,F))
(v) Ekv(F,G) –> Ekv(F,FvG)
(vi) Pr(F,G) –> Pr(FvG,G)
(vii) Pr(F,G) –> Pr(FvH,G)
(viii) Pos(F) –> (Ekv(FvG,F) v Pr(FvG,F))
(ix) Pos(F) & Pos(G) –>¬(Pr(FvG,F) & Pr(FvG,G))
(x) Pr(F,H) & Pr(G,H) –> Pr(FvG,H)
(xi) Pos(F) & Pos(G) –> (Pr(FvG,H) –>. Pr(F,H) v Pr(G,H))

---

2 Er X et n-tuple betegner (X);k den k'te komponenten i tuplet. Siden en P0-modell M er et triple betegner derfor uttrykket (M);1 den første komponenten i triplet; det som man intuitivt kunne kalle klassen av de mulige verdenene i modellen.

(xii) Pr(F,G) & Pr(H,J) –> Pr(FvH,GvJ)
(xiii) Pos(F) & Pos(G) –> (Ekv(FvG,H) –> Ekv(F,H) v Ekv(G,H))
(xiv) Pr(F&G,H) –>. Pr(F,H) & Pr(G,H)
(xv) Pos(F&G) –>(Pr(F,G) –> Pr(F&¬G, F&G))
(xvi) Pr(F&¬G,G) –> Pr(F,G)
(xvii) Pr(F,G) –> ¬Pr(F,¬G)
(xviii) Pr(F,G) –> (Pr(¬G,F) v Ekv(¬G,F))
(xix) Pr(F,G) –> Pr(¬G,G)

Vi bemerker at beviset for dette teoremet er forholdsvis enkelt. Man benytter seg av Definisjon 3.1 – 3.6 samt de teoremene vi beviste om Q;R og E;R i Avsnitt A. Vi overlater derfor beviset til leseren som en øvelse. Som et eksempel på bevisteknikken gir vi likevel et bevis for formel (xv):

Bevis: Anta M= <W,<R;w>/wêW/,V> er en P0-modell. Anta videre at
(1) True(Pos(F&G),w,M,L;A) og (2) True(Pr(F,G),w,M,L;A).
La oss sette:
a1 = Sm;<L;A,M>(F) og a2 = Sm;<L;A,M>(G).
Da følger fra (1) og Definisjon 3.3 at a1Ωb1≠ø. Herav har vi siden M oppfyller kravet K2 i Definisjon 3.5 at Max(R;w, a1Ωb1)≠ø. Fra (2) og Definisjon 3.3 følger videre a1 Q;(R;w) b1. Da har vi imidlertid i lys av Teorem 3.26 i Avsnitt A at
(a1–b1)Q;(R;w)(a1Ωb1) siden Pref(R;w) og a1,b1 Inkl D(R;w). Men herav følger at True(Pr(F&¬G,F&G),w,M,L;A) ved hjelp av Definisjon 3.3. **Q.E.D.**
De andre påstandene i Teorem 3.8 bevises på lignende vis.

§4 Det preferanselogiske systemet P1

Språket til systemet P1 er L;B , med andre ord språket L;A utvidet med den binære formeldannende konstruksjonen på to formler E.
Aksiomene i systemet P1 er:

(i) Alle instanser av skjemaene U1 – U3, M1 –M4, PE1 – PE12 i språket L;B
(ii) Alle instanser av det følgende aksiomskjema for operatoren E i L;B hvor F,GêFm(L;B):

AP1 E(F,G) <–> (Pr(G&F, G&¬F) v Nec(G –> F)

Dermed har vi gitt en fullstendig definisjon av Ax(P1), klassen av aksiomer i systemet P1. Slutningsregler i systemet er reglene R1 – R3 i §2, med andre ord modus ponens, modal generalisering og substitusjon av bevisbare ekvivalenter.
Dermed har vi gitt en fullstendig definisjon av systemet P1. Vi bemerker at om FêFm(L;B) så betyr Th(P1,F) at F er et teorem i P1. Tm(P1), klassen av teoremer i P1 er definert som den minste mengden X Inkl Fm(L;B) som ineholder Ax(P1) og som dessuten er lukket under slutningsreglene R1 – R3.

§4.1 Modellteori for systemet P1

Vi definerer først hva som menes med en L;B-modell. Dette skjer ved den følgende definisjon:

Definisjon 4.1.1 La S= <W, <R;w>/wêW/> være en modellstruktur.

(i) Med en L;B-valuasjon over S forstår vi en funksjon V der
Dom(V) = P;<0,0,0>(L;B) & Rgn(V) Inkl Pt(W)
Dette innebærer at en L:A-valuasjon over S er en funksjon som tilordner alle setningsbokstavene i L;A delmengder av W.

(ii) En L;B-modell er et triple M=<W, <R;w>/wêW/,V> der S=<W, <R;w>/wêW/> er en modellstruktur og V en L;B-valuasjon over modellstrukturen S. Vi bruker "Mod(L;B,x)" som forkortelse for uttrykket "x er en L;B-modell".

Det neste vi må gjøre er å definere "True(F,w,M,L;B)" som leses "F er en formel som er sann i verdenen w i modellen M relativt til språket L;B". Vi får en passende definisjon om alle forekomster av "L;A" i Definisjon 3.3 erstattes med "L;B" og man legger til den følgende klausul:

(vii) Er F = E(G,H) der G,HêFm(L;B) har man at:
True(F,w,M,L;B) <–> Max(R;w, x1) Inkl x2 der
x;1 = Mg(w: True(G,w,M,L;B)) og
x2 = Mg(w: True(H,w,M,L;B))

Skrives definisjonen helt ut kan den formuleres slik:

Definisjon 4.1.2 La M være en L;B-modell der M=<W, <R;w>/wêW/,V>. Vi definerer da uttrykket "True(F,w,M,L;B)", som leses "Formelen F er sann ved indekspunktet w i modellen M relativt til L;B", ved den følgende induktive definisjon på lengden av formler i L;B:

(i) Er FêP;<0,0,0>(L;B) –> (True(F,w,M,L;B) <–> wêV(F))

(ii) Er F=(¬G) der GêFm(L;B) har man at:
True(F,w,M,L;B) <–> ¬True(G,w,M,L;B)

(iii) Er F=(G–>H) der G,HêFm(L;B) har man at:
True(F,w,M,L;B) <–> (True(G,w,M,L;B) –>True(H,w,M,L;B))

(iv) Er F= Nec(G) der GêFm(L;B) har man at:
True(F,w,M,L;B) <–> (Ay)(yêW –> True(G,y,M,L;B))

(v) Er F= Pr(G,H) der G;HêFm(L;B) har man at:
True(F,w,M,L;B) <–> x1 Q;(R;w) x2 hvor:
x1 = Mg(w: True(G,w,M,L;B)) og
x2 = Mg(w: True(H,w,M,L;B))

(vi) Er F= Ekv(G,H) der G;HêFm(L;B) har man at:
True(F,w,M,L;B) <–> x1 E;(R;w) x2 hvor:
x1 = Mg(w: True(G,w,M,L;B)) og
x2 = Mg(w: True(H,w,M,L;B))

(vii) Er F = E(G,H) der G,HêFm(L;B) har man at:
True(F,w,M,L;B) <–> Max(R;w, x1) Inkl x2 der
x1 = Mg(w: True(G,w,M,L;B)) og

x2 = Mg(w: True(H,w,M,L;B))

Vi får en adekvat definisjon av Sm;<L;B,M(F) ved å erstatte enhver forkomst av "L;A" i Definisjon 3.4 med "L;B". Definisjonen kan formuleres fullstendig slik:

Definisjon 4.1.3 Er M=<W, <R;w>/wêW/,V> en L;B-modell og FêFm(L;B) setter vi:
Sm;<L;B,M>(F) = Mg(w: True(F,w,M,L;B))

Tilslutt definerer vi hva som menes med en P1-modell nøyaktig som ved Definisjon 3.5 bortsett fra at vi i denne definisjonen erstatter alle forkomster av "LA" med "L;B" og erstatter enhver forekomst av "P0" med "P1". Fullstendig skrevet ut blir definisjonen slik:

Definisjon 4.1.4 Er M=<W, <R;w>/wêW/,V> en L;B-modell så er M en P1-modell hvis og bare hvis M oppfyller de følgende to krav:
(K1) (Aw)(wêW –> Max(R;w,W)≠ø)
(K2) (AF)(FêFm(L;B) & Sm;<L;B,M>(F)≠ø .–>
(Aw)(wêW –> Max(R;w, Sm;<L;B,M>(F))≠ø)
Vi bruker "P1Mod(x)" som forkortelse for uttrykket "x er en P1-modell".

Tilslutt definerer vi "F er P1-gyldig, i symboler "Val;P1(F)", ved:

Definisjon 4.1.5 En formel F er P1-gyldig i symboler Val;P1(F) hvis og bare hvis den oppfyller de følgende krav:
(i) FêFm(L;B)
(ii) (AM)(Aw)(P1Mod(M) & wê(M);1 –> True(F,w,M,L;B))

Dermed har vi gitt en helt eksplisitt beskrivelse av de deler av modellteorien for P1 som vi trenger. Det er nå lett å vise at gyldighetsteoremet holder for P1. Vi har:

Teorem 4.1.6 Er FêFm(L;B) –> (Th(P1, F) –> Val;P;1(F))

Det bør også noteres at Teorem 3.8 fremdeles holder om vi overalt erstatter "L;A" med "L;B" og "P0" med "P1".

Det følgende teorem gir en oversikt over noen viktige formler for operatoren E som er P1-gyldige:

Teorem 4.1.7 Anta F,G,H er formler i L;B. Da har man Val;P1(S), med andre ord at S er P1-gyldig, om S er en av formlene på den følgende liste:

(i) Pos(G) –> (E(F,G) –> ¬E(¬F,G))
(ii) E(F–>G,H) & E(F,H) –> E(G,H)
(iii) Nec(F) –> E(F,G)
(iv) Nec(F–>G) –>(E(F,H) –> E(G,H)
(v) Nec(F–>G) –> E(G,F)
(vi) E(F,F)
(vii) E(F,G&H) –> E(Fv¬H,G)
(viii) Pos(F) –> ¬E(¬F,F)

(ix) E(F,G) & E(F,H) –> E(F,GvH)
(x) E(F,GvH) –> (E(F,G) v E(F,H))
(xi) E(FvG,H) & ¬E(F,H). –> E(F, H&¬G)
(xii) E(F,H) & E(G,F&H) –> E(F&G,H)
(xiii) Pos(H) –> (E(F&G,H) –> E(F,G&H))
(xiv) E(F,H) & ¬E(¬G,H) –> E(F,H&G)
(xv) ¬Pos(G) –> E(F,G)

Bevis: Man benytter Definisjon 4.1.1 – Definisjon 4.1.5 samt Teorem 3.47 i §3 i Avsnitt A. Detaljene overlates til leseren. **Q.E.D.**

I forbindelse med Teorem 4.1.7 kan det også være av interesse å notere at den følgende sats holder. Denne nevner en rekke formler og slutningsregler som ikke er P1-gyldige:

Teorem 4.1.8

(i) (EF)(EG)(F,GêFm(L;B) & ¬Val;P1(E(F,G) –> ¬E(¬F,G))
(ii) (EF)(EG)(EH)(F,G,HêFm(L;B) &
Val;P1(F–>G) & ¬Val;P1(E(H,F) –> E(H,G)))
(iii) (EF)(EG)(EH)(F,G,HêFm(L;B) &
Val;P1(F–>G) & ¬Val;P1(E(H,G) –> E(H,F)))
(iv) (EF)(EG)(F,GêFm(L;B) & ¬Val;P1((¬F) –> ¬E(G,F)))
(v) (EF)(EG)(F,GêFm(L;B) & ¬Val;P1(E(F,G) –>F))
(vi) (EF)(EG)(F,GêFm(L;B) & ¬Val;P1(E(F,G) –> G))

Beviset for denne satsen er ikke spesielt vanskelig. Det utelates her av plasshensyn. Leseren kan eventuelt gjøre en øvelse ut av beviset for teoremet om vedkommende ønsker det.

§5 Det preferanselogiske systemet P2.

Språket til systemet P2 er L;C , med andre ord språket L;B utvidet med de to triadiske konnektivene Ekv;c og Pr;c.

Aksiomene i systemet P2 omfatter:

(i) Alle instanser av skjemaene U1 – U3, M1 –M4, PE1 – PE12 i språket L;C
(ii) Alle instanser av det følgende aksiomskjema for operatoren E i L;C hvor F,GêFm(L;C):
AP1 E(F,G) <–> (Pr(G&F, G&¬F) v Nec(G –> F)
(iii) Alle instanser av de følgende to skjemaer i L;C hvor F,G,HêFm(L;C):
AP2 Pr;c(F,G,H) <–> Pr(H&F,H&G)
AP3 Ekv;c(F,G,H) <–> Ekv(H&F,H&G)

Dermed har vi gitt en fullstendig definisjon av Ax(P2), klassen av aksiomer i systemet P2. Slutningsregler i systemet er reglene R1 – R3 i §2, med andre ord modus ponens, modal generalisering og substitusjon av bevisbare ekvivalenter.

Dermed har vi gitt en fullstendig definisjon av systemet P2.

Vi bemerker at om FêFm(L;C) så betyr Th(P2,F) at F er et teorem i P2. Tm(P2), klassen av teoremer i P2 er definert som den minste mengden X Inkl Fm(L;C) som ineholder Ax(P2) og som dessuten er lukket under slutningsreglene R1 – R3.

§5.1 Modellteori for systemet P2

Vi definerer først hva som menes med en L;C-modell. Dette skjer ved den følgende definisjon:

Definisjon 5.1.1 La S= <W, <R;w>/wêW/> være en modellstruktur.

(i) Med en L;C-valuasjon over S forstår vi en funksjon V der
Dom(V) = P;<0,0,0>(L;C) & Rgn(V) Inkl Pt(W)
Dette innebærer at en L:A-valuasjon over S er en funksjon som tilordner alle setningsbokstavene i L;A delmengder av W.

(ii) En L;C-modell er et triple M=<W, <R;w>/wêW/,V> der S=<W, <R;w>/wêW/> er en modellstrukturog V en L;C-valuasjon over modellstrukturen S. Vi bruker "Mod(L;C,x)" som forkortelse for uttrykket "x er en L;C-modell".

Det neste vi må gjøre er å definere "True(F,w,M,L;C)" som leses "F er en formel som er sann i verdenen w i modellen M relativt til språket L;C". Vi får en passende definisjon om alle forekomster av "L;B" i Definisjon 4.1.2 erstattes med "L;C" og man legger til de følgende klausuler:

(viii) Er F = Ekv;c(F,G,H) der F,G,HêFm(L;C) har man at:
True(F,w,M,L;C) <–> x1 E;<R;w,y> x2 der
x;1 = Mg(w: True(F,w,M,L;C)) og
x2 = Mg(w: True(G,w,M,L;C))
y = Mg(w: True(H,w,M,L;C))

(ix) Er F = Pr;c(F,G,H) der F,G,HêFm(L;C) har man at:
True(F,w,M,L;C) <–> x1 Q;<R;w,y> x2 der
x;1 = Mg(w: True(F,w,M,L;C)) og
x2 = Mg(w: True(G,w,M,L;C))
y = Mg(w: True(H,w,M,L;C))

Skrives definisjonen helt ut kan den formuleres slik:

Definisjon 5.1.2 La M være en L;C-modell der
M=<W, <R;w>/wêW/,V>. Vi definerer da uttrykket "True(F,w,M,L;C)", som leses "Formelen F er sann ved indekspunktet w i modellen M relativt til L;C", ved den følgende induktive definisjon på lengden av formler i L;C:

(i) Er FêP;<0,0,0>(L;C) –> (True(F,w,M,L;C) <–> wêV(F))

(ii) Er F=(¬G) der GêFm(L;C) har man at:
True(F,w,M,L;C) <–> ¬True(G,w,M,L;C)

(iii) Er F=(G–>H) der G,HêFm(L;C) har man at:
True(F,w,M,L;C) <–> (True(G,w,M,L;C) –>True(H,w,M,L;C))

(iv) Er F= Nec(G) der GêFm(L;C) har man at:

True(F,w,M,L;C) <–> (Ay)(yêW –> True(G,y,M,L;C))

(v) Er F= Pr(G,H) der G;HêFm(L;C) har man at:
True(F,w,M,L;C) <–> x1 Q;(R;w) x2 hvor:
x1 = Mg(w: True(G,w,M,L;C)) og
x2 = Mg(w: True(H,w,M,L;C))

(vi) Er F= Ekv(G,H) der G;HêFm(L;C) har man at:
True(F,w,M,L;C) <–> x1 E;(R;w) x2 hvor:
x1 = Mg(w: True(G,w,M,L;C)) og
x2 = Mg(w: True(H,w,M,L;C))

(vii) Er F = E(G,H) der G,HêFm(L;C) har man at:
True(F,w,M,L;C) <–> Max(R;w, x1) Inkl x2 der
x1 = Mg(w: True(G,w,M,L;C)) og
x2 = Mg(w: True(H,w,M,L;C))

(viii) Er F = Ekv;c(F,G,H) der F,G,HêFm(L;C) har man at:
True(F,w,M,L;C) <–> x1 E;<R;w,y> x2 der
x1 = Mg(w: True(F,w,M,L;C)) og
x2 = Mg(w: True(G,w,M,L;C))
y = Mg(w: True(H,w,M,L;C))

(ix) Er F = Pr;c(F,G,H) der F,G,HêFm(L;C) har man at:
True(F,w,M,L;C) <–> x1 Q;<R;w,y> x2 der
x1 = Mg(w: True(F,w,M,L;C)) og
x2 = Mg(w: True(G,w,M,L;C))
y = Mg(w: True(H,w,M,L;C))

Vi får en adekvat definisjon av Sm;<L;C,M>(F) ved å erstatte enhver forkomst av "L;A" i Definisjon 3.4 med "L;C". Definisjonen kan formuleres fullstendig slik:

Definisjon 5.1.3 Er M=<W, <R;w>/wêW/,V> en L;C-modell og FêFm(L;C) setter vi:
Sm;<L;C,M>(F) = Mg(w: True(F,w,M,L;C))

Tilslutt definerer vi hva som menes med en P2-modell nøyaktig som ved Definisjon 3.5 bortsett fra at vi i denne definisjonen erstatter alle forkomster av "LA" med "L;C" og erstatter enhver forekomst av "P0" med "P2". Fullstendig skrevet ut blir definisjonen slik:

Definisjon 5.1.4 Er M=<W, <R;w>/wêW/,V> en L;C-modell så er M en P2-modell hvis og bare hvis M oppfyller de følgende to krav:

(K1) (Aw)(wêW –> Max(R;w,W)≠ø)

(K2) (AF)(FêFm(L;C) & Sm;<L;C,M>(F)≠ø .–>
(Aw)(wêW –> Max(R;w, Sm;<L;C,M>(F))≠ø)

Vi bruker "P2Mod(x)" som forkortelse for uttrykket "x er en P0-modell".

Tilslutt definerer vi "F er P2-gyldig, i symboler "Val;P2(F)", ved:

Definisjon 5.1.5 En formel F er P2-gyldig i symboler Val;P2(F) hvis og bare hvis den oppfyller de følgende krav:

(i) FêFm(L;C)

(ii) (AM)(Aw)(P2Mod(M) & wê(M);1 –> True(F,w,M,L;C))

Dermed har vi gitt en helt eksplisitt beskrivelse av de deler av modellteorien for P2 som vi trenger.

Det er lett å vise at gyldighetsteoremet holder for P2. Man har :

Teorem 5.1.6 FêFm(L;C) –> (Th(P2,F) –> Val;P2(F))

Videre bemerker vi at Teorem 3.8 og Teorem 4.1.7 fremdeles holder om vi erstatter "L;A" og "L;B" overalt med "L;C" og erstatter "P0" og "P1" overalt med "P2".

Det følgende teorem gir en oversikt over noen viktige lover som gjelder for konnektivene Ekv;c og Pr;c:

Teorem 5.1.7 Anta F,G,H,R er formler i L;C. Da har man Val;P2(S), med andre ord at S er P2-gyldig, om S er en av formlene på den følgende liste:

(i) Pr;c(F,G,H) ⪻c(G,R,H) –> Pr;c(F,R,H)
(ii) Pr;c(F,G,H) –> ¬Pr;c(G,F,H)
(iii) Ekv;c(F,G,H) &Ekv;c(G,R,H) –> Ekv;c(F,R,H)
(iv) Ekv;c(F,G,H) –> Ekv;c(G,F,H)
(v) Pos(F&H) –> Pr;c(F,F,H)
(vi) Ekv;c(F,G,H) & Pr;c(F,R,H) –> Pr;c(G,R,H)
(vii) Ekv;c(F,G,H) & Pr;c(R,F,H) –> Pr;c(R,G,H)
(viii) Pos(F&H) & Pos(G&H) –>.
Pr;c(F,G,H) v Ekv;c(F,G,H) v Pr;c(G,F,H)
(ix) Pos(F&H) –> (Ekv;c(Gv¬G,F,H) v Ekv;c(Gv¬G,F,H))
(x) (Ekv;c(F,G,H) v Ekv;c(F,G,H)) –> (Pos(F&H) & Pos(G&H))
(xi) Pr;c(F,G,H) –>Ekv;c(F&¬G,G,H)
(xii) Pr;c(F,G,H) –> Ekv;c(FvR,G,H)
(xiii) Pr;c(F,G,H) –> Ekv;c(FvG,G,H)
(xiv) Pos(F&G&H) –> (Pr;c(F,G,H) –> Pr;c(F,F&G,H))
(xv) Pr;c(F,G,H) –> Ekv;c(F&¬G,F,H)
(xvi) Pr;c(F,G,H) –> ¬Pr;c(F,¬G,H)
(xvii) Pr;c(F,G,H) –> Pr;c(¬G,G,H)
(xviii) Pr;c(F&¬G,G,H) –> Pr;c(F,G,H)

Bevis: Man benytter Definisjon 5.1.1 – Definisjon 5.1.5 samt teoremene Teorem 3.37 – Teorem 3.46 i §3 i Avsnitt A. Detaljene overlates til leseren. **Q.E.D.**

§6 Det preferanselogiske systemet P3.

Språket til systemet P3 er L;D som ble beskrevet i §1 i dette avsnittet. Det er altså språket man får fra L;C ved å legge til de to konnektivene Tg og O.

Aksiomene i P3 omfatter nøyaktig de følgende formler:

(i) Alle instanser av skjemaene U1 – U3, M1 –M4, PE1 – PE12, AP1 – AP3 i språket L;D

(ii) Alle instanser av det følgende aksiomskjemaer for operatorene O og Tg i L;D hvor F,GêFm(L;D):

AP4.1 Nec(F<–>G) –> (Tg(F) <–> Tg(G)
AP4.2 Tg(F) & Tg(G) –> Nec(F<–>G)
AP4.3 Tg(F) –>(E(G,F) <–> O(G))
AP4.4 Nec(F) –> O(G)
AP4.5 O(F) & O(F –> G). –> O(G)

Dermed har vi gitt en fullstendig definisjon av Ax(P3), klassen av aksiomer i systemet P3. Slutningsregler i systemet er reglene R1 – R3 i §2, med andre ord modus ponens, modal generalisering og substitusjon av bevisbare ekvivalenter.

Dermed har vi gitt en fullstendig definisjon av systemet P3. Vi bemerker at om FêFm(L;B) så betyr Th(P3,F) at F er et teorem i P3. Tm(P3), klassen av teoremer i P3, er definert som den minste mengden X Inkl Fm(L;D) som ineholder Ax(P3) og som dessuten er lukket under slutningsreglene R1 – R3.

§6.1 Modellteori for P3.

Vi definerer først hva som menes med en L;D-modell. Dette skjer ved den følgende definisjon:

Definisjon 6.1.1 La S= <W, <R;w>/wêW/> være en modellstruktur.

(i) Med en L;D-valuasjon over S forstår vi en funksjon V der
Dom(V) = P;<0,0,0>(L;D) & Rgn(V) Inkl Pt(W)
Dette innebærer at en L:D-valuasjon over S er en funksjon som tilordner alle setningsbokstavene i L;D delmengder av W.

(ii) En L;D-modell er et 5-tuple
M=<W, <R;w>/wêW/,<*f*(w)>/wêW/,C,V> der
S=<W, <R;w>/wêW/> er en modellstruktur og V en L;D-valuasjon over modellstrukturen S. C er en relasjon over W, ie. C Inkl WXW.
For hver w er *f*(w) en funksjon som oppfyller det følgende krav:

Det neste vi må gjøre er å definere "True(F,w,M,L;D)" som leses "F er en formel som er sann i verdenen w i modellen M relativt til språket L;D". Vi får en passende definisjon om vi gjør følgende forandringer og tilføyelser i Definisjon 5.1.2: (i) Overalt hvor "L;C" forekommer erstatter vi det med uttrykket "L;D". (ii) Vi erstatter den første setningen i definisjonen "La M være en L;C-modell der M=<W, <R;w>/wêW/,V>" med "La M være en L;D-modell der M=<W, <R;w>/wêW/,<*f*(w)>/wêW/,C,V>". (iii) Vi føyer til de følgende klausuler i definisjonen i tillegg til de andre:

(x) Er F = Tg(F) der FêFm(L;D) har man at:
True(F,w,M,L;D) <–> xê*f*(w) der
x = Mg(w: True(F,w,M,L;D)) og

(xi) Er F = O(F) der FêFm(L;D) har man at:
True(F,w,M,L;D) <–> (Ay)(wCy –> True(F,w,M,L;D))

Skrives definisjonen helt ut kan den formuleres slik:

Definisjon 6.1.2 La M være en L;D-modell der
M=<W, <R;w>/wêW/,<f(w)>/wêW/,C,V>. Vi definerer da uttrykket "True(F,w,M,L;D)", som leses "Formelen F er sann ved indekspunktet w i modellen M relativt til L;D", ved den følgende induktive definisjon på lengden av formler i L;D:

(i) Er FêP;<0,0,0>(L;D) –> (True(F,w,M,L;D) <–> wêV(F))
(ii) Er F=(¬G) der GêFm(L;D) har man at:
True(F,w,M,L;D) <–> ¬True(G,w,M,L;D)
(iii) Er F=(G–>H) der G,HêFm(L;D) har man at:
True(F,w,M,L;D) <–> (True(G,w,M,L;D) –>True(H,w,M,L;D))
(iv) Er F= Nec(G) der GêFm(L;D) har man at:
True(F,w,M,L;D) <–> (Ay)(yêW –> True(G,y,M,L;D))
(v) Er F= Pr(G,H) der G;HêFm(L;D) har man at:
True(F,w,M,L;D) <–> x1 Q;(R;w) x2 hvor:
x;1 = Mg(w: True(G,w,M,L;D)) og
x2 = Mg(w: True(H,w,M,L;D))
(vi) Er F= Ekv(G,H) der G;HêFm(L;D) har man at:
True(F,w,M,L;D) <–> x1 E;(R;w) x2 hvor:
x;1 = Mg(w: True(G,w,M,L;D)) og
x2 = Mg(w: True(H,w,M,L;D))
(vii) Er F = E(G,H) der G,HêFm(L;D) har man at:
True(F,w,M,L;D) <–> Max(R;w, x1) Inkl x2 der
x;1 = Mg(w: True(H,w,M,L;D)) og
x;2 = Mg(w: True(G,w,M,L;D))
(viii) Er F = Ekv;c(F,G,H) der F,G,HêFm(L;D) har man at:
True(F,w,M,L;D) <–> x1 E;<R;w,y> x2 der
x;1 = Mg(w: True(F,w,M,L;D)) og
x2 = Mg(w: True(G,w,M,L;D))
y = Mg(w: True(H,w,M,L;D))
(ix) Er F = Pr;c(F,G,H) der F,G,HêFm(L;D) har man at:
True(F,w,M,L;D) <–> x1 Q;<R;w,y> x2 der
x;1 = Mg(w: True(F,w,M,L;D)) og
x2 = Mg(w: True(G,w,M,L;D))
y = Mg(w: True(H,w,M,L;D))
(x) Er F = Tg(F) der FêFm(L;D) har man at:
True(F,w,M,L;D) <–> xêf(w) der
x = Mg(w: True(F,w,M,L;D)) og
(xi) Er F = O(F) der FêFm(L;D) har man at:
True(F,w,M,L;D) <–> (Ay)(wCy –> True(F,w,M,L;D))

Vi får en adekvat definisjon av Sm;<L;D,M>(F) ved å erstatte enhver forkomst av "L;A" i Definisjon 3.4 med "L;D". Definisjonen kan formuleres fullstendig slik:

Definisjon 6.1.3 Er M=<W, <R;w>/wêW/,<f(w)>/wêW/,C,V> en L;D-modell og FêFm(L;D) setter vi:
Sm;<L;D,M>(F) = Mg(w: True(F,w,M,L;D))

Det bør bemerkes at vi bruker "Mod(L;D,x)" som forkortelse for "x er en L;D-modell". Vi skal imidlertid definere en klasse av modeller, P3-modellene, som er en delmengde av L;D-modellene i betydningen ovenfor. Dette skjer ved:

Definisjon 6.1.4 Er M=<W, <R;w>/wêW/,<f(w)>/wêW/,C,V> en L;D-modell så er M en P3-modell hvis og bare hvis M oppfyller de følgende to krav:

(K1) (Aw)(wêW –> Max(R;w,W)≠ø)

(K2) (AF)(FêFm(L;B) & Sm;<L;B,M>(F)≠ø .–>
(Aw)(wêW –> Max(R;w, Sm;<L;B,M>(F))≠ø)

(K3) (Aw)(wêW & f(w)≠ø –>(Ex)(xêPt(W) & f(w) = {x}))

(K4) (AF)(FêFm(L;D) –> (Ax)(Aw)(x Inkl W & wêW –>.
(xêf(w) & Max(R;w,x) Inkl Sm;<L;D,M>(F)) –>
Mg(y:wCy) Inkl Sm;<L;D,M)(F))

(K5) (AF)(FêFm(L;D) –> (Ax)(Aw)(x Inkl W & wêW –>.
(xêf(w) & Mg(y: wCy) Inkl Sm;<L;D,M)(F)) –>
Max(R;w,x) Inkl Sm;<L;D,M>(F))

Vi bruker "P3Mod(x)" som forkortelse for uttrykket "x er en P3-modell".

Vi har pålagt en P3-modell kravene (K3) – (K4) for at aksiomene AP4.1 – AP4.5 skal bli gyldige i alle P3.modeller.

Tilslutt definerer vi "F er P3-gyldig, i symboler "Val;P3(F)", ved:

Definisjon 6.1.5 En formel F er P3-gyldig i symboler "Val;P3(F)" hvis og bare hvis den oppfyller de følgende krav:

(i) FêFm(L;D)

(ii) (AM)(Aw)(P3Mod(M) & wê(M);1 –> True(F,w,M,L;D))

Dermed har vi gitt en helt eksplisitt beskrivelse av de deler av modellteorien for P2 som vi trenger.

Det er lett å vise at gyldighetsteoremet holder for P3. Man har :

Teorem 6.1.6 FêFm(L;D) –> (Th(P3,F) –> Val;P3(F))

I Avsnitt C vil vi også vise at det omvendte holder: at alle P3-gyldige formler er P3-teoremer. Dette innebærer at P3 er fullstendig om P3-gyldighet brukes gyldighetskriterium.

La oss tilslutt bemerke at Teorem 3.8, Teorem 4.1.7 og Teorem 5.1.7 fremdeles holder om vi overalt i disse satsene erstatter "L;A","L;B" og "L;C" med "L;D" og "P0", "P1" og "P2" med "P3". P3 er derfor det mest omfangsrike av de systemene vi har konstruert.

§7 Alternative aksiomatiseringer og modifikasjoner av systemene P0 – P3.

Før vi går videre vil vi betrakte en alternativ måte å aksiomatisere systemene P0 – P3 på. I stedet for å bruke aksiomskjemaene PE1 – PE12 kan bruke det følgende sett som man forholdsvis lett ser at er ekvivalent:

AP0-1 Pr(F,G) & Pr(G,H) –> Pr(F,H)

AP0-2 Pr(F,G) –> ¬Pr(G,F)
AP0-3 ¬Pr(F,F)
AP0-4 Ekv(F,G) & Ekv(G,H) –> Ekv(F,H)
AP0-5 Ekv(F,G) –> Ekv(G,F)
AP0-6 Ekv(F,G) & Pr(F,H) –> Pr(G,H)
AP0-7 Ekv(F,G) & Pr(H,F) –> Pr(H,F)
AP0-8 (Pr(F,G) v Ekv(F,G)) –> (Pos(F) & Pos(G))
AP0-9 Pr(F,G) –> Pr(F&¬G,G)
AP0-10 (Ekv(F,F) & Ekv(G,G)) <–> (Pr(F,G) v Ekv(F,G) v Pr(G,F))
AP0-11 Pos(F) –> Ekv(F,F)
AP0-12 Pos(F) –> (Ekv(Gv¬G,F) v Pr(Gv¬G,F))

Ser man nøyere på disse aksiomene ser man at AP0-11 og AP0-12 reflekterer kravene K1 og K2 som vi har pålagt P0-modellene. Sløyfer man disse kravene på P0-modellene får man en mer omfangsrik klasse med modeller. La oss kalle denne klassen med P0'-modeller. AP0-1 – AP0-10 er alle gyldige med hensyn på denne mer omfattende modellklassen. Likeledes er selvfølgelig også U1 – U3, M1 – M4 også P0'-gyldige. R1 – R3 vil bevare gyldighet av denne typen. Dette svakere systemet virker interessant, men vi skal faktisk ikke studere det nøyere her. Det kan bemerkes at fullstendighetsproblemet og avgjørbarhetsproblemet til dette systemet ikke er løst.

Vi vil imidlertid betrakte noen andre modifikasjoner av kalkylene vi hittil har betraktet:

Definisjon 7.1 La X være et av systemene P0 – P3 og la L;X være språket til X. Det systemet som fremkommer når alle instanser av de følgende to aksiomskjemaer i L;X legges til aksiomene i X kalles for XDet:

Det 1 Nec(Pr(F,G)) v Nec(¬(Pr(F,G)))
Det 2 Nec(Ekv(F,G)) v Nec(¬(Ekv(F,G)))

Korresponderende modellklasser defineres slik:

Definisjon 7.2 Anta X er et av systemene P0, P1 eller P2. Anta
M= <W,<R;w>/wêW/,V>
er en X-modell. Da er den en XDet-modell hvis og bare hvis den i tillegg oppfyller de følgende krav for alle w,w1,w2êW:
Dt 1 R;w(w1,w2) –> (Ay)(yêW –> R;y(w1,w2))
Dt 2 ¬R;w(w1,w2). –> (Ay)(yêW –> ¬R;y(w1,w2))

Vi definerer Val;XDet(F) der X=P0,P1, P2 på en fullstendig opplagt måte.

Definisjon 7.3 Anta M= <W,<R;w>/wêW/,<*f*(w)>/wêW,C,V>
er en P3-modell. Da er den en P3Det-modell hvis og bare hvis den i tillegg oppfyller de følgende krav for alle w,w1,w2êW:
Dt 1 R;w(w1,w2) –> (Ay)(yêW –> R;y(w1,w2))
Dt 2 ¬R;w(w1,w2). –> (Ay)(yêW –> ¬R;y(w1,w2))

Også i forbindelse med denne definisjonen bemerkes det at Val;P3Det(F) defineres på en helt opplagt måte.

Man kan kalle modeller M som oppfyller kravene Dt 1 og Dt 2 for modeller med rigid preferanserelasjon. Aksiomene Det 1 og Det 2 har åpenbare konsekvenser for itereringen av preferanseoperatorene og bestemmer betydningen til formler som inneholder slike iterasjoner fullstendig. Kravene Dt 1 og Dt 2 kan også kort sammenfattes ved å si at vi i modeller med rigid preferanserelasjon har vi i bunn og grunn bare en slik relasjon som ikke endrer seg når man går fra en verden til en annen.

Også nå overlater vi til leseren å sjekke:

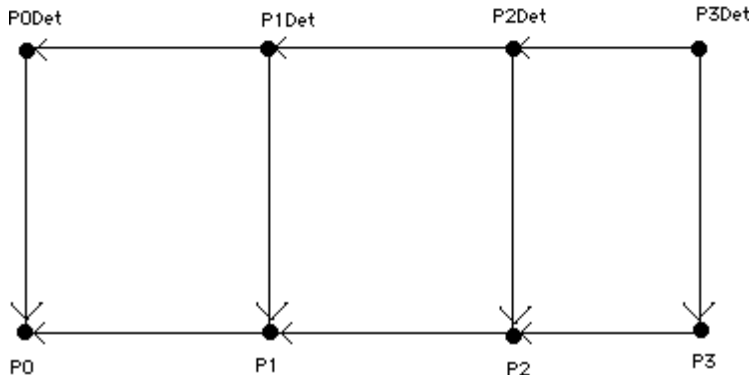
Teorem 7.4 La X være et av systemene P0, P1, P2 eller P3. La L;X være språket til systemet X. Da har man:

(AF)(FêFm(L;X) –>. Th(XDet,F) –> Val;XDet(F))

I det neste avsnitt skal vi vise at alle systemene som har blitt definert i denne paragrafen er fullstendige.

Vi avslutter med den følgende figur som viser inklusjonsforholdene mellom de systemene som så langt har blitt definert. En pil som går fra et system X til et annet Y representerer det forhold at alle teoremene i Y er inkludert i X.

FIGUR 1



***

Avsnitt C

§0 Innledning.

I dette avsnittet vil vi gi bevis for at alle systemene I Figur 1 i §7, Avsnitt B, er fullstendige. Vi skal også fremlegge fullstendige bevis for at systemene P0, P1 og P2 har en

avgjørelsesprosedyre. I våre fullstendighetsbevis benytter vi oss av en bevisprosedyre som stammer fra Henkin [1]. Hvordan denne metoden kan anvendes i forbindelse med med modallogiske systemer er klart gjort rede for i Cresswell [1]. Det bør imidlertid bemerkes at fremstillingen her er temmelig detaljert og i hovedtrekkene skulle være forståelig uten at man kjenner de to nevnte arbeider.

§1 Preliminære definisjoner og resultater.

I det følgende betegner S et vilkårlig valgt system blandt dem vi definerte i forrige avsnitt. L;S betegner språket til S. Vi definerer "teorem i S" og "bevis i S" på vanlig måte. Mengden av teoremer i S betegnes med "Tm(S)". LaΔ være en formelmengde der Δ Inkl Fm(L;S). Vi betegner da den miste formelmengden som inneholder Δ og Tm(S) og som er lukket under modus ponens med "Δ;S". Mengden av alle S-teorier er identisk med Mg(Δ;S: Δ Inkl Fm(L;S)). En S-teori er konsistent hvis og bare hvis F&¬F ikke er medlem av teorien for noen formel FêFm(L;S). En S-teori er maksimalt konsistent hvis og bare hvis den er konsistent og enhver S-teori som inneholder den som en ekste del er inkonsistent. Om maksimalt konsistente S-teorier gjelder den følgende sats:

Lemma 1.1 Anta $\sum$ er en maksimalt konsistent S-teori. Da har man:
(i) (AF)(FêFm(L;S) –> (Fê$\sum$ v (¬F)ê$\sum$))
(ii) Er F,G,H formler i L;S har man:
(F–>G)ê$\sum$ & Fê$\sum$. –> Gê$\sum$
(iii) FêFm(L;S) –> ¬(Fê$\sum$ & (¬F)ê$\sum$)

Denne satsen er velkjent og leseren kan selv gi et bevis for den utfra de definisjonene som har blitt gitt ovenfor og andre elementære fakta. Den følgende sats kalles ofte for Lindenbaums teorem. Man finner et bevis for den i Cresswell [1].

Lemma 1.2 (Lindenbaum) Anta $\sum$ er en konsistent S-teori. Da finnes det en maksimalt konsistent S-teori Δ som er slik at $\sum$ Inkl Δ.

Er Δ Inkl Fm(L;S) så er så kalle Δ for S-konsistent hvis og bare hvis Δ;S er en konsistent S-teori. Δ kalles for en maksimalt S-konsistent mengde hvis og bare hvis Δ er en maksimalt konsistent S-teori. I det følgende bruker vi "MaxK;S(Δ)" som forkortelse for "Δ er en maksimalt konsistent S-teori".

Vi definerer nå hva som menes med en maksimalt konsistent S-teori Δ;2 er underordnet en annen Δ;1, i symboler "Δ;2 Sub;S Δ;1"

Definisjon 1.3 Man setter at Δ;2 Sub;S Δ;1 hvis og bare hvis Δ;1og Δ;2 oppfyller de følgende krav:
(i) Δ;2, Δ;1 Inkl Fm(L;S)
(ii) MaxK;S(Δ;1) & MaxK;S(Δ;2)
(iii) (EF)(Pos(F)êΔ;1 & {F}U{G: Nec(G)êΔ;1) Inkl Δ;2)]

Som antydet leses "Δ;2 Sub;S Δ;1" som "Δ;2 er S-underordnet Δ;1".

Lemma 1.4 Anta følgende to påstander holder:

(i) MaxK;S(Δ) & Pos(F)êΔ

(ii) Er ∑ Inkl Fm(L;S) og er {G;1,...,G;n} en vilkårlig endelig delmengde av ∑ så er Pos(F&G;1 &...&G;n)êΔ.

Da gjelder:

(a) {F}U∑U {H: Nec(H)êΔ} er S-konsistent.

(b) Hvis MaxK;S(Δ;2) og {F}U∑U Mg(H: Nec(H)êΔ) Inkl Δ;2 så har man at Δ;2 Sub;S Δ.

Bevis: Anta {F}U∑U Mg(H: Nec(H)êΔ) er inkonsistent med hensyn på S. Da finnes det formler G;1,...,G;nê∑ og H;1,...,H;mêMg(H: Nec(H)êΔ) der n,m≥0 slik at

(1) (F&G;1&...&G;n & H;1&...&H;m –> (B&¬B)) êTm(S).

Siden alle de vanlige teoremer i setningslogikken er inkludert i S følger herav:

(2) (H;1&...&H;m –> ¬(F&G;1&...&G;n)) êTm(S)

Herav følger siden alle S5-teoremene for Pos og Nec er med i S:

(3) (Nec(H;1)&... & Nec(H;m) –> ¬Pos(F&G;1 &...&G;n)) êTm(S)

Men siden Δ er maksimalt konsistent følger fra dette ved hjelp av Lemma 1.1 at (¬Pos(F&G;1 &...&G;n))êΔ. Men dette strider mot forutsetningene i teoremet.

At Δ;2 Sub;S Δ ser man at lett følger fra forutsetningene og Definisjon 1.3 av Sub;S.

Q.E.D.

Vi definerer:

Definisjon 1.5 Vi sier Δ er indirekte underordnet ∑, i symboler "ΔSub*;S ∑" hvis og bare hvis det finnes en funksjon f som oppfyller de følgende krav:

(i) (En)(nêN & Dom(f) = Mg(y: yêN & y≤n))

(ii) Rgn(f) Inkl Mg(x: MaxK;S(x))

(iii) (Am)(0≤m<n –> f(m) Sub;S f(m+1))

(iv) f(n)=Δ og f(0) = ∑

Vi sier at Δ er S-underordnet ∑ på nivå n, i symboler " Δ Sub;<S,n> ∑ hvis og bare hvis det finnes en funksjon f som oppfyller de følgende krav:

(i) nêN & Dom(f) = Mg(y: yêN & y≤n)

(ii) Rgn(f) Inkl Mg(x: MaxK;S(x))

(iii) (Am)(0≤m<n –> f(m) Sub;S f(m+1))

(iv) f(n)=Δ og f(0) = ∑

Som det fremgår av definisjonen har man at ΔSub*;S ∑ holder hvis og bare hvis det finnes en sekvens av maksimalt konsisistente S-teorier Δ;0, Δ;1,....,Δ;n der Δ;0 =∑ og Δ;n=Δ og det dessuten gjelder at Δ;(i+1) Sub;S Δ;i for alle iê{1,...,n-1}. Videre ser man at man har Δ Sub*;S ∑ <–> (En)(Δ Sub;<S,n> ∑).

Vi definerer:

Definisjon 1.6 W;<Δ,S> = Mg(∑: ∑ Sub*;S Δ)

Fra denne definisjonen ser man at W;<Δ,S> er klassen av alle maksimalt konsistente S-teorier i L;S som er indirekte underordnet Δ. Det følger selvfølgelig at W;<Δ,S> kun består av maksimalt S-konsistente teorier om den er ikke-tom.

Lemma 1.7 Anta wêW;<Δ,S> & MaxK(Δ). Da har man for alle FêFm(L;S):
Nec(F)êw <–> (Ay)(yêW;<Δ,S> –> Fêy)

Bevis: La oss sette w;0 =Δ. (i) Anta (1) Nec(F)êw. Siden wêW;<Δ,S> har man at (2) har man at (2) w Sub;<S,n> w;0 for noe n≥0. Anta w;1 er et vilkårlig element i W;<S,Δ>. Da har man på samme måte at (3) w;1 Sub;<S,m> w;0 for noe m≥0. Anta for reduktio ad absurdum at ¬(Nec(F)êw;0). Siden MaxK(w;0) må man ha at (¬Nec(F))êw;0. Videre må w;0 inneholder alle S5-teoremene og derfor har vi at ¬Nec(F) –> Pos(¬F) er med i w;0. Dette innbærer at Pos(¬F)êw;0. Nå har man at Pos(¬F) –> Nec;n(Pos(¬F)) er et teorem i S5 og derfor at denne setningen er med i w;0. Siden w;0 er maksimalt S-konsistent følger at Nec;n(Pos(¬F))êw;0.[3] Fra dette og (2) følger i lys av definisjonene av relasjonene Sub og Sub;<S,n> at Pos(¬F)êw. Men dette strider mot (1),det at alle S5-teoremene i L;S er med i w og at w er maksimalt S-konsistent. Vi må derfor ha Nec(F)êw;0. Men siden S5 er inkludert i S og alle S5-teoremene derfor er inkludert i enhver maksimalt konsistent mengde har vi at (Nec(F) –> Nec;m(F))êw;0. Det følger at Nec;m(F)êw;0. Fra dette, (3) og definisjonene av Sub;<S,n> og Sub følger at Fêw;1. Men w;1 var et vilkårlig element i W;<S,Δ>. Det følger at kondisjonalen mot høyre holder. Vi gjør oppmerksom på at dersom m=0 har man denne kondisjonalen holder fordi Nec(F) –> F er et S5-teorem.

(ii). Anta at (4) ¬(Nec(F)êw). Siden wêW;<S,Δ> følger det at det finnes n≥0 slik at (5) w Sub;<S,n> w;0. Fra (4) har man, siden w er maksimalt S-konsistent at (¬Nec(F))êw. Dette innebærer at Pos(¬F)êw. Sett nå

Q= {¬F}UMg(G: Nec(G)êw)). Vi ønsker å vise at Q er S-konsistent. Anta mot formodning at Q ikke er S-konsistent. Da finnes det

G;1,...,G;nêMg(G: Nec(G)êw) slik at

(¬F & G;1& .... & G;n –> (D&¬D))êTm(S) Siden alle S5-teoremene er inkludert i S har vi da at Nec(G;1) &....&Nec(G;n)–> (Pos(¬F) –> Pos(D&¬D)) er et teorem i S. Men siden w er maksimalt S-konsistent innebærer dette at Pos(D&¬D)êw. Men dette er umulig siden alle S5 teoremene er inkludert i w. Det følger at Q er konsistent og derfor ved hjelp av Lindenbaums lemma at at det finnes en maksimalt S-konsitent mengde w;2 slik at Q Inkl w;2. Det er da klart at w;2 Sub;S w og derfor at w;2êW;<S,Δ>. Men vi har at (¬F)êQ Inkl w;2. Det følger siden w;2 er maksimalt S-konsistent at ¬(Fêw2). Vi har nå vist at hvis ¬(Nec(F)êw) så finnes det w;2êW;<S,Δ> slik at ¬(Fêw;2). Dette viser at kondisjonalen mot venstre holder. **Q.E.D.**

§2 Konstruksjon av kanoniske modeller.

Vi definerer:

Definisjon 2.1(i) Sm;<Δ,S>(F) = Mg(w: wêW;<S,Δ> & Fêw)

(ii) J;<Δ,S,w>(F) =
UN(Mg(Sm;<Δ,S>(G): GêFm(L;S) & Pr(F,G)êw)

(iii) r;<w,Δ,S>(F) = (Sm;<Δ,S>(F) – J;<Δ,S,w>(F))

---

3 Uttrykket Nec;n(F) der nêN er definert induktivt ved:
(i) Nec;0(F) = F og (ii) Nec;(n+1)(F) = Nec(Nec;n(F)).

Dernest definerer vi:

Definisjon 2.2

(i) $\langle x,y\rangle \hat{e} R^*;\langle w,\Delta,S\rangle \leftrightarrow$
$(EH1)(EH2)(\ Pr(H1, H2)\hat{e}w \ \&\ x\hat{e}(r;\langle w,\Delta,S\rangle(H1)) \ \&\ y\hat{e}(r;\langle w,\Delta,S\rangle(H2)))$

(ii) $\langle x,y\rangle \hat{e} L^*;\langle w,\Delta,S\rangle \leftrightarrow$
$(EH1)(EH2)(Ekv(H1, H2)\hat{e}w \ \&\ x\hat{e}(r;\langle w,\Delta,S\rangle(H1)) \ \&\ y\hat{e}(r;\langle w,\Delta,S\rangle(H2)))$

(iii) $\langle x,y\rangle \hat{e} R;\langle w,\Delta,S\rangle \leftrightarrow (\langle x,y\rangle \hat{e} R^*;\langle w,\Delta,S\rangle \vee \langle x,y\rangle L;\langle w,\Delta,S\rangle)$

Vi trenger nå den følgende hjelpesetning:

Lemma 2.3 Anta (i) $MaxK;S(\Delta) \ \&\ w\hat{e}W;\langle S,\Delta\rangle$. Anta enn mer at:
(ii) $Ekv(F,F)\hat{e}w \ \&\ Ekv(G,G)\hat{e}w$ samt
(iii) $x\hat{e}r;\langle w,\Delta,S\rangle(F) \ \&\ x\hat{e}r;\langle w,\Delta,S\rangle(G)$ Da gjelder:
$Ekv(F,G)\hat{e}w$

Bevis: Fra forutsetningene under (iii) følger ved hjelp av Definisjon 2.1:
(1) $x\hat{e}r;\langle w,\Delta,S\rangle(F) \ \&\ (AH)(Pr(F,H)\hat{e}w \rightarrow \neg(x\hat{e}Sm;\langle\Delta,S\rangle(H)))$
(2) $x\hat{e}r;\langle w,\Delta,S\rangle(G) \ \&\ (AH)(Pr(G,H)\hat{e}w \rightarrow \neg(x\hat{e}Sm;\langle\Delta,S\rangle(H)))$

Anta $Pr(F,G)\hat{e}w$. Dette og (1) impliserer at $\neg(x\hat{e}Sm;\langle\Delta,S\rangle(G))$ som er uforenelig med den første konjunkten i (2) i lys av Definisjon 2.1. Siden w er maksimalt S-konsisten må man derfor ha at (3) $(\neg Pr(F,G))\hat{e}w$. På en helt analog måte utleder man at (4) $(\neg Pr(G,F))\hat{e}w$. Nå har man at AP0-10 inngår i S og derfor er med i w. Fra dette, forutsetningene under (ii) og det faktum at w er maksimalt konsistent har man: $(Pr(F,G) \vee Ekv(F,G) \vee Pr(G,F))\ \hat{e}w$. Men dette, (3) og (4) følger
$Ekv(F,G)\hat{e}w$ siden w er en maksimalt S-konsistent mengde. **Q.E.D.**

Lemma 2.4 Anta $MaxK;S(\Delta) \ \&\ w\hat{e}W;\langle S,\Delta\rangle$. Da gjelder:
(i) $\langle x,y\rangle \hat{e} R^*;\langle w,\Delta,S\rangle \ \&\ \langle y,z\rangle \hat{e} R^*;\langle w,\Delta,S\rangle \rightarrow \langle x,z\rangle \hat{e} R^*;\langle w,\Delta,S\rangle$
(ii) $\langle x,y\rangle \hat{e} R^*;\langle w,\Delta,S\rangle \rightarrow \neg(\langle y,x\rangle \hat{e} R^*;\langle w,\Delta,S\rangle)$
(iii) $\langle x,y\rangle \hat{e} L^*;\langle w,\Delta,S\rangle \rightarrow \langle y,x\rangle \hat{e} L^*;\langle w,\Delta,S\rangle$
(iv) $\langle x,y\rangle \hat{e} L^*;\langle w,\Delta,S\rangle \ \&\ \langle y,z\rangle \hat{e} L^*;\langle w,\Delta,S\rangle \rightarrow \langle x,z\rangle \hat{e} L^*;\langle w,\Delta,S\rangle$
(v) $\langle x,y\rangle \hat{e} L^*;\langle w,\Delta,S\rangle \ \&\ \langle x,z\rangle \hat{e} R^*;\langle w,\Delta,S\rangle \rightarrow \langle y,z\rangle \hat{e} R^*;\langle w,\Delta,S\rangle$
(vi) $\langle x,y\rangle \hat{e} L^*;\langle w,\Delta,S\rangle \ \&\ \langle z,x\rangle \hat{e} R^*;\langle w,\Delta,S\rangle \rightarrow \langle z,y\rangle \hat{e} R^*;\langle w,\Delta,S\rangle$
(vii) $\langle x,x\rangle \hat{e} L^*;\langle w,\Delta,S\rangle \ \&\ \langle x,x\rangle \hat{e} L^*;\langle w,\Delta,S\rangle \rightarrow$.
$\langle x,y\rangle \hat{e} R^*;\langle w,\Delta,S\rangle \vee \langle x,y\rangle \hat{e} L^*;\langle w,\Delta,S\rangle \vee \langle y,x\rangle \hat{e} R^*;\langle w,\Delta,S\rangle$

Bevis: Ad (i): Anta $\langle x,y\rangle \hat{e} R^*;\langle w,\Delta,S\rangle \ \&\ \langle y,z\rangle \hat{e} R^*;\langle w,\Delta,S\rangle$. Ved hjelp av Definisjon 2.2 følger da eksistensen av formler F,G og F',G' der man har:
(1) $Pr(F, G)\hat{e}w \ \&\ x\hat{e}(r;\langle w,\Delta,S\rangle(F)) \ \&\ y\hat{e}(r;\langle w,\Delta,S\rangle(G))$
(2) $Pr(F',G')\hat{e}w \ \&\ y\hat{e}(r;\langle w,\Delta,S\rangle(F')) \ \&\ z\hat{e}(r;\langle w,\Delta,S\rangle(G'))$

I lys av at w er maksimalt konsistent mengde og AP0-8 og AP0-11 er aksiomer i S og derfor med i w følger fra de to første konjunktene i (1) og (2) at:
(3) $Ekv(G,G)\hat{e}w \ \&\ Ekv(F',F')\hat{e}w$. Fra dette, den siste konjunkten i (1), den andre konjunkten i (2) og Lemma 2.3 følger (4) $Ekv(G,F')\hat{e}w$. Fra dette, de to første konjunktene i (1) og (2), det faktum at AP0-aksiomene er med i S og det faktum at w er maksimalt

konsistent følger Pr(F,G')êw. Men dette, (1) og (2) impliserer ved hjelp av Definisjon 2.2 at <x,z>êL*;<w,Δ,S>.

Ad (ii): Anta for reduktio ad absurdum at:

<x,y>êR*;<w,Δ,S> & <y,x>êR*;<w,Δ,S>

Ved hjelp av Definisjon 2.2 følger da eksistensen av formler F,G og F',G' der man har:

(1) Pr(F, G)êw & xê(r;<w,Δ,S>(F)) & yê(r;<w,Δ,S>(G))

(2) Pr(F',G')êw & yê(r;<w,Δ,S>(F')) & xê(r;<w,Δ,S>(G'))

Fra de to første konjunktene i (1) og (2) har vi på samme måte som under det forrige punktet at Ekv(F,F)êw & Ekv(G',G')êw. Ved hjelp av dette, (1), (2) og Lemma 2.3 følger (3) Ekv(F,G'). På en helt tilsvarende måte utleder man at

(4) Ekv(F',G)êw Men siden AP0-aksiomene inngår i S og w er maksimalt konsistent har man i lys av (1) – (4) at Pr(F,F)êw. Dette er utelukket siden ¬Pr(F,F) må være et teorem i S og w er maksimalt konsistent.

Ad (iii): Dette er trivielt i lys av Definisjon 2.2.

Ad (iv): Beviset for denne påstanden har samme struktur som beviset for påstanden under punkt (i). Vi overlater dette til leseren.

Ad (v): Anta <x,y>êL*;<w,Δ,S> & <x,z>êR*;<w,Δ,S>. Ved hjelp av Definisjon 2.2 følger da eksistensen av formler F,G og F',G' der man har:

(1) Ekv(F, G)êw & xê(r;<w,Δ,S>(F)) & yê(r;<w,Δ,S>(G))

(2) Pr(F',G')êw & xê(r;<w,Δ,S>(F')) & zê(r;<w,Δ,S>(G'))

Siden MaxK;S(w) og man har:

(Ekv(F,G) –> Ekv(F,F))êTm(S) & (Pr(F',G') –> Ekv(F',F'))êTm(S) har vi i lys av de to første konjunktene i (1) og (2) at:

(4) (Ekv(F,F) & Ekv(F',F'))êw. Dette, (1), (2) og Lemma 2.3 impliserer (5) Ekv(F,F')êw. Fra dette, de to første konjunktene i (1) og (2), det faktum at AP0-aksiomene er med i S og det faktum at w er maksimalt konsistent følger Pr(F,G')êw. Men dette, (1) og (2) impliserer ved hjelp av Definisjon 2.2 at <x,z>êR*;<w,Δ,S>.

Ad (vi): Beviset for denne setningen er helt analogt med beviset for det forrige punktet.

Ad (vii): Anta <x,x>êL*;<w,Δ,S> & <y,y>êL*;<w,Δ,S>. Ved hjelp av Definisjon 2.2 følger da eksistensen av formler F,G og F',G' der man har:

(1) Ekv(F, G)êw & xê(r;<w,Δ,S>(F)) & xê(r;<w,Δ,S>(G))

(2) Ekv(F',G')êw & yê(r;<w,Δ,S>(F')) & yê(r;<w,Δ,S>(G'))

Siden MaxK;S(w) og man har:

(Ekv(F,G) –> Ekv(F,F))êTm(S) & (Ekv(F',G') –> Ekv(F',F'))êTm(S) har vi i lys av de to første konjunktene i (1) og (2) at:

(4) (Ekv(F,F) & Ekv(F',F'))êw. Fra dette, de to første konjunktene i (1) og (2), det faktum at AP0-aksiomene er med i S og det faktum at w er maksimalt konsistent følger (Pr(F,F') v Ekv(F,F') vPr(F',F))êw. Siden MaxK;S(w) følger herav: Pr(F,F')êw v Ekv(F',F)êw v Pr(F',F)êw

Men dette, (1) og (2) impliserer ved hjelp av Definisjon 2.2 at:

<x,y>êR*;<w,Δ,S>v <x,y>êL*;<w,Δ,S> v<y,x>êR*;<w,Δ,S>.

Dermed har vi gitt et fullstendig bevis for Lemma 2.4 **Q.E.D.**

Vi setter:

Definisjon 2.5C;<w,Δ,S> = (W;<Δ,S> – Mg(x: ¬(<x,x>êL*<w,Δ,S>)))

Fra denne definisjonen og Lemma 2.4 har man da:

Teorem 2.6 MaxK;S(Δ) & wêW;<Δ,S> & C;<w,Δ,S>≠ø –>
Pref(Rest(R*;<w,Δ,S>, C;<w,Δ,S>)

La oss nå definere et nytt relasjonspar <¶;<w,Δ,S>, E;<w,Δ,S>> ved:

Definisjon 2.7 (i) <x,y>ê<¶;<w,Δ,S> <–>
((x,yêC;<w,Δ,S> & <x,y>êR*;<w,Δ,S>)v
(xêC;<w,Δ,S> & yê(W;<Δ,S> – C;<w,Δ,S>)))
(ii) <x,y>ê<E;<w,Δ,S> <–>
((x,yêC;<w,Δ,S> & <x,y>êR*;<w,Δ,S>) v
(x,yê(W;<Δ,S> – C;<w,Δ,S>))

Ved hjelp av Teorem 2.6 er det nå meget lett å bevise den følgende sats:

Teorem 2.8 Har man MaxK;S(Δ) & wêW;<S,Δ> gjelder at
Pref;S(<¶;<w,Δ,S>, E;<w,Δ,S>>), mao. at paret <¶;<w,Δ,S>, E;<w,Δ,S>> er et preferansesystem. Dette innebærer at:

(i) <x,y>ê¶;<w,Δ,S> & <y,z>ê¶;<w,Δ,S> –> <x,z>ê¶;<w,Δ,S>
(ii) <x,y>ê¶;<w,Δ,S> –> ¬(<y,x>ê¶;<w,Δ,S>)
(iii) ¬(<x,x>ê¶;<w,Δ,S>)
(iv) <x,y>êE;<w,Δ,S> –> <y,x>êE;<w,Δ,S>
(v) <x,y>êE;<w,Δ,S> & <y,z>êE;<w,Δ,S> –> <x,z>êE;<w,Δ,S>
(vi) xêW;<Δ,S> –> <x,x>êE;<w,Δ,S>.
(vi) <x,y>êE;<w,Δ,S> & <x,z>ê¶;<w,Δ,S> –> <y,z>ê¶;<w,Δ,S>
(vii) <x,y>êE;<w,Δ,S> & <z,x>ê¶;<w,Δ,S> –> <z,y>ê¶;<w,Δ,S>
(viii) <x,x>êE;<w,Δ,S> & <x,x>êE;<w,Δ,S> –>.
<x,y>ê¶;<w,Δ,S>v <x,y>êE;<w,Δ,S> v<y,x>ê¶;<w,Δ,S>

Vi definerer:

Definisjon 2.7.1 <x,y>êP;<w,Δ,S> <–> (<x,y>ê¶;<w,Δ,S>v <x,y>êE;<w,Δ,S>)

Det skulle ikke være spesielt vanskelig å se at relasjonen P;<w,Δ,S> er en preferanserelasjon for alle wêW;<Δ,S> forutsatt at MaxK;S(Δ). Dette følger nesten direkte fra Teorem 2.8. Det følger fra dette at

<W;<Δ,S>, <P;<w,Δ,S>>/wêW;<Δ,S>/> er en modellstruktur. Merk at dette holder generelt for alle våre systemer siden vi i konstruksjonen av denne modellstrukturen hittil bare har benyttet det faktum at AP0-1 – AP0-10 er med blandt teoremene i S og disse aksiomene er teoremer i alle våre teorier.

Vi trenger etterhvert den følgende hjelpesetning:

Lemma 2.9 (a) Anta F;GêFm(L;S). Da er den følgende formel et teorem i S:
Pr(F,G) –> Ekv(F&¬G),F)

(b) Anta f,G;1,...,G;nêFm(L;S) Da er den følgende formel er et teorem i S:
Konj/i,1,n/(Pr(F,G;i)) –> Ekv(F&Konj/i,1,n/(¬G;i),F)

Bevis: Den følgende sekvens av formler representerer en rigorøs deduksjon av formelen nevnt under punkt (a) i systemet S:

(1)	Pr(F, F&¬G) –> Pr(F&(¬(F&¬G)), F&¬G)	AP0-9
(2)	Pr(F, F&¬G) –> Pr(F&G, F&¬G)	(1), R3
(3)	Pr(F, G) –> Pr(F&¬G, G)	AP0-9
(4)	Pr(F&G, F&¬G) & Pr(F&¬G, G) –> Pr(F&G, F)	AP0-1
(5)	Pr(F,G) & Pr(F, F&¬G) –> Pr(F&G, G)	(2), (3), (4)
(6)	Pr(F&G, G) –> Pr((F&G)&¬G), G)	AP0-9
(7)	Pr((F&G)&¬G), G) –> Pos((F&G)&¬G)	AP0-8
(8)	¬Pos((F&G)&¬G)	S5-teorem
(9)	Pr(F,G)–> ¬Pr(F, F&¬G)	(5), (6), (7) og (8)
(10)	Pr(F&¬G, F) –> ¬Pr(F&¬G&¬F,F)	AP0-9
(11)	Pr(F&¬G&¬F,F) –> Pos(F&¬G&¬F)	AP0-8
(12)	¬Pos(F&¬G&¬F)	S5-teorem
(13)	¬Pr(F&¬G, F)	(10), (11), (12)
(14)	Pr(F,G) –> Ekv(F,F)	AP0-10
(15)	Pr(F, G) –> Pr(F&¬G, G)	AP0-9
(16)	Pr(F&¬G,G) –> Ekv(F&¬G,F&¬G)	AP0-10
(17)	Pr(F,G) –> (Ekv(F,F) & Ekv(F&¬G,F&¬G))	(14), (15), (16)
(18)	Pr(F,G) –> (Pr(F&¬G,F) v Ekv(F&¬G,F) v Pr(F,F&¬G))	(17), AP0-10
(19)	Pr(F,G) –> Ekv(F&¬G),F)	(9), (13), (18).

(b) Beviset for at formelen er et teorem i S er ved induksjon på n. For n=1 holder påstanden i kraft av det som ble vist under punkt (a). Anta påstanden holder for n. Vi viser at den holder for n+1. Anta at F,G;1,...,G;n+1 er formler i L;S. Den følgende deduksjon viser at påstanden holder om den holder for n:

(1)	Konj/i,1,n/(Pr(F,G;i)) –> Ekv(F&Konj/i,1,n/(¬G;i),F)	IH
(2)	Ekv(F&Konj/i,1,n/(¬G;i),F) & Pr(F,G;n+1) –> Pr(F&Konj/i,1,n/(¬G;i),G;n+1)	AP0-6
(3)	Konj/i,1,n/(Pr(F,G;i)) & Pr(F,G;n+1) –> Pr(F&Konj/i,1,n/(¬G;i),G;n+1)	(1), (2)
(4)	Pr(F&Konj/i,1,n/(¬G;i),G;n+1)) –> Ekv(F&Konj/i,1,n/(¬G;i)&¬G;n+1,F&Konj/i,1,n/(¬G;i))	Pkt. (a)
(5)	Konj/i,1,n+1/(Pr(F,G;i)) –> Ekv(F&Konj/i,1,n+1/(¬G;i),F&Konj/i,1,n/(¬G;i))	(3), (4)
(6)	Konj/i,1,n+1/(Pr(F,G;i)) –> Ekv(F&Konj/i,1,n+1/(¬G;i) ,F)	(1), (5), AP0-4

Dette viser at satsen holder. **Q.E.D.**

I det følgende tenker vi oss at Δ og S er helt fiksert og at w er et bestemt vilkårlig element i W;<Δ,S>. Vi skal derfor sløyfe parametrene Δ og S i uttrykkene "r;<w,Δ,S>","¶;<w,Δ,S>" og "E;<w,Δ,S>" og i stedet bare skrive "r;w","¶;w" og "E;w". Det samme gjelder uttrykkene "R*;<w,Δ,S>", "L*;<w,Δ,S>" og "C;<w,Δ,S>". I det følgende skriver vi i stedet for disse uttrykkene "R*;w", "L*;w" og "C;w". Endelig skal vi også sløyfe indeksen "<Δ,S>" i uttrykk av typen "Sm;<Δ,S>(G)" og bare skrive "Sm(G)". Det er da underforstått at Sm(G) er sannhetsmengden til formelen F relativt til W;<Δ,S> der Δ er en maksimalt konsistent teori i systemet S.

Vi gir nå bevis for en rekke hjelpesetninger.

Lemma 2.10 Har man MaxK;S(Δ) & wêW;<Δ,S> gjelder:
Pr(F,G)êw –> r;w(F)≠ø & r;w(G)≠ø

Bevis: Anta (1) Pr(F,G)êw. Siden (Pr(F,G) –> (Pos(F) & Pos(G)))êTm(S) har vi at (2) Pos(F)êw og (3) Pos(G)êw. Sett K = Mg(H: HêFm(L;S) &Pr(F,H)êw). Vi studerer bare dette tilfelle, har man K = Mg(H: HêFm(L;S) &Pr(G,H)êw) blir beviset helt analogt og kan overlates til leseren. La ∑ = {B;1,...,B;n} være en vilkårlig delmengde av K. Da har vi i lys av definisjonen av K at:

(4) Konj/i,1,n/((Pr(F,B;i))êw). I lys av Lemma 2.9 samt det faktum at MaxK;S(Δ) følger herav:

(5) Ekv(F& Konj/i,1,n/(¬B;i), F)êw. I lys av AP0-8 følger fra dette at Pos(F& Konj/i,1,n/(¬B;i))êw. Ved hjelp av Lemma 1.4 har vi nå at

∏ = {F}U∑;1U Mg(C: Nec(C)êw) er en S-konsistent mengde om ∑;1 = Mg(¬B: BêK). Det finnes da en maksimalt S-konsistent teori w;1 der ∏ Inkl w1. I følge Lemma 1.4 har vi også at w;1 Sub;S w og derfor at w;1êW;<Δ,S>. Vi må følgelig ha at (5) Fêw;1 og dessuten at

(6) (AH)(Hê∑;1 –> Hêw;1). Fra (5) følger (7) w;1êSm(F). Fra (6) har vi: (8) (AH)(HêK –>(¬H)êw;1) og derfor: (9) (AH)(Pr(F,H)êw –> ¬(w;1êSm(H))). Dette innebærer at ¬(w;1êJ;w(F)) og derfor sammen med (7) at w;1êr;w(F). Følgelig må vi ha at r;w(F)≠ø. Som nevnt blir beviset for at r;w(G)≠ø med utgangspunkt i (1) helt analogt. **Q.E.D.**

Lemma 2.11 Har man MaxK;S(Δ) & wêW;<Δ,S> gjelder:
Ekv(F,G)êw –> r;w(F)≠ø & r;w(G)≠ø

Bevis: Beviset er av nøyaktig samme type som det som ble gitt for Lemm 2.10 og overlates derfor til leseren. **Q.E.D.**

Vi ønsker nå å gi bevis for den følgende sats som er meget vesentlig:

Lemma 2.12 Har man MaxK;S(Δ) & wêW;<Δ,S> og (Pr(F,G)vEkv(F,G))êw gjelder:
(i) r;w(F) Inkl Max(¶;w,m(F) ≠ø
(ii) r;w(G) Inkl Max(¶;w,m(G) ≠ø

Bevis: Anta de to første forutsetningene holder og at (1) (Pr(F,G)vEkv(F,G))êw. Fra Lemma 2.10 har vi da: (2) r;w(F)≠ø & R;w(G)≠ø. I lys av definisjone av R;w har vi da at:

(3) r;w(F) Inkl Sm(F) & R;w(G) Inkl Sm(G)

Vi beviser nå bare (i) i teoremet siden beviset for (ii) blir fullstendig analogt. Anta for reduktio ad absurdum at det finnes x0 der man har;

(4) x0êr;w(F) & ¬(x0êMax(¶;w,m(F)).

Fra (3) og (4) følger x0êSm(F). Dette og den andre konjunkten i (4) impliserer i lys av definisjonen av Max at det finnes noe y der man har:

(5) yêSm(F) & <y,x0>ê¶;w. Siden (Pr(F,G)vEkv(F,G))êw følger Ekv(F,F)êw. Dette, den første konjunten i (4) og Definisjon 2.2 impliserer at <x0,x0>êL*;w og derfor at x0êC;w. Fra dette, den andre konjunkteni (5) og Definisjon 2.7 følger at (6) yêC;w & <y,x0>êR*;w. Fra dette følger så i lys av definisjonen av R*;w at det finnes formler H;1 og H;2 der man har:

(7) Pr(H;1,H;2)êw (8) yêr;w(H1) og (9) x0êr;w(H;2). Fra (7) følger Ekv(H;2,H;2)êw. Fra (1) følger Ekv(F,F)êw. Disse to forhold, (9), samt den første konjunkten i (4) impliserer i lys av Lemma 2.3 at (10) Ekv(H;2,F)êw. Vi skiller nå mellom to tilfeller:

Tilfelle (1): yêr;w(F). Siden vi fra (7) har Ekv(H;1,H;1)êw og fra (1) har at Ekv(F,F)êw har vi ved hjelp av (8) og Lemma 2.3 at (Ekv(F,H;1)êw. Men dette er umulig i lys av (7) og (10). Dette tilfellet er derfor utelukket.

Tilfelle (2): ¬(yêr;w(F)). Siden yêSm(F) i følge (5) må man da ha at yêJ;w(F). Det må derfor finnes en formel B slik at (11) Pr(F,B)êw & yêSm(B). Sammen med (7) og (10) har vi fra (11) at (12) Pr(H;1,B)êw. Fra (8) følger i lys av definisjonen av r;w at:

(AC)(Pr(H;1,C)êw –> ¬(yêSm(C)). Men fra dette og (12) følger ¬(yêSm(B). Men dette strider åpenbart mot den andre konjunkten i (11). Derfor er også dette tilfellet umulig.

Begge tilfellene leder til en motsigelse. Dette innebærer at antagelsen at det skulle finnes x0 der (4) holder leder til en motsigelse. Defor må man ha:

r;w(F) Inkl Max(¶;w,m(F) ≠ø.

Som nevnt bevises (ii) på en helt analog måte. **Q.E.D.**

Den neste hjelpesetningen er av en helt avgjørende betydning i beviset for fullstendigheten til kalkylene vi har formulert.

Lemma 2.13 Har man MaxK;S(Δ) & wêW;<Δ,S> gjelder:

(i) Pr(F,G)êw <–> (Ex1)(Ex2)(<x1,x2>ê¶;w &
x1êMax(¶;w,Sm(F)) &x2êMax(¶;w,Sm(G))

(ii) Ekv(F,G)êw <–> (Ex1)(Ex2)(<x1,x2>êE;w &
x1êMax(¶;w,Sm(F)) &x2êMax(¶;w,Sm(G))

Bevis: Vi beviser først at kondisjonalen mot høyre i (i) holder. Anta:

(1) Pr(F,G)êw. Da har man ved hjelp av Lemma 2.10 at det finnes x0 og x1 der:

(2) x0êr;w(F) & x1êr;w(G). Men dette og (1) gir oss i lys av Definisjon 2.2 at (3) <x0,x1>êR*;w. Fra (1) følger også at Ekv(F,F)êw & Ekv(G,G)êw, som i lys av (2) og Definisjon 2.2, gir en <x1,x1>êL*;w & <x0,x0>êL*;w. Dette impliserer x1,x0êC;w. Fra dette og (3) kan man slutte (4) <x0,x1>ê¶;w. Ved hjelp av Lemma 2.12, (2) og (4) følger så høyre side i (i). Kondisjonalen mot høyre i (ii) bevises på akkurat samme måte. Beviset overlates til leseren.

La oss nå se på beviset for kondisjonalen mot venstre i (i): Anta at det finnes x1,x2 slik at:

(1) <x1,x2>ê¶;w

(2) x1êMax(¶;w,Sm(F))

(3) x2êMax(¶;w,Sm(G))

Det følger fra (2), (3) og definisjonen av Max at Sm(F)≠ø &Sm(G)≠ø. Fra dette følger så (4) (Pos(F) & Pos(G))êw. For siden Sm(F)≠ø &Sm(G)≠ø har vi at det må finnes w1,w2 der Fêw1 og Gêw2 der w1,w2êW. Siden S5-teoremene er inkludert i alle de maksimalt konsistente teoriene som er elementer i W har vi da at Pos(F)êw1 og Pos(G)êw2 og derfor, igjen siden S5-teoremene er inkluder i S at Nec(Pos(F))êw1 og Nec(Pos(G))êw2. Men fra dette og Lemma 1.7 følger (4). Siden AP0-10 og AP0-11 er med i S må man i lys av (4) ha at:

(+) (Pr(F,G) v Ekv(F,G) v Pr(G,F))êw. Anta nå for reduktio ad absurdum at ¬(Pr(F,G)êw). Da har man (¬Pr(F,G))êw og derfor i lys av (+) at man enten må ha Pr(G,F)êw eller Ekv(F,G)êw. Vi skal vise at begge disse tilfellene er umulige.

Tilfelle (1): Pr(G,F)êw. Da har vi i lys av kondisjonalen mot høyre i (i) i teoremet – og denne kondisjonalen har vi nå bevist – at det må finnes x3 og x4 slik at:

(5) <x3,x4>ê¶;w & x3êMax(¶;w,Sm(G)) & x4êMax(¶;w,Sm(F))

Sammen med (2) og (3) impliserer dette: <x1,x4>êE;w & <x2,x3>êE;w. Dette sammen med (1) og (5) gir oss en motsigelse.

Tilfelle (2): Ekv(F,G)êw. Da har man i lys av kondisjonalen mot høyre i (ii) i satsen – denne har vi nå bevist – at det finnes x3' og x4' der:

(6) <x3',x4'>êE;w & x3'êMax(¶;w,Sm(G)) & x4'êMax(¶;w,Sm(F))

Sammen med (2) og (3) impliserer dette: <x1,x4'>êE;w & <x2,x3>êE;w. Dette sammen med (1) og (6) gir oss en motsigelse.

Beviset for kondisjonalen mot venstre i (ii) er av lignende type og overlates til leseren. Dette avslutter beviset for Lemma 2.13. **Q.E.D.**

Lemma 2.14 Anta MaxK;S(Δ) & wêW;<Δ,S>. Da har man:

FêFm(L;S) & Sm(F)≠ø –> Max(¶;w,Sm(F)) ≠ø

Bevis: Anta forutsetningene holder og ar Sm(F)≠ø for noen formel F i L;S. Da følger det at det finnes w'êW slik at Fêw'. Det følger siden S5-teoremene inngår i S at Pos(F)êw' og derfor at Nec(Pos(F))êw'. Men da har man Pos(F)êw. Siden AP0-12 er et aksiomskjema i S har vi da at (Ekv(Gv¬G,F) v Pr(Gv¬G,F)) êw og derfor at Ekv(Gv¬G,F)êw eller Pr(Gv¬G,F)êw. I begge tilfelle følger Max(¶;w,Sm(F)) ≠ø ved hjelp av Lemma 2.13. **Q.E.D.**

Lemma 2.15 Anta Th(P1) Inkl Th(S) og at MaxK;s(Δ). Anta videre at wêW;<Δ,S> og F,GêFm(L;S). Da gjelder:

E(G,F)êw <–> Max(¶;w,Sm(F)) Inkl Sm(G)

Bevis: (a) Vi beviser først kondisjonalen mot høyre. Anta (1) E(G,F)êw. Siden AP1 er et aksiomskjema i P1 og dette systemet nå inngår i S har man at

(Pr(F&G,F&¬G) v Nec(F–>G))êw. Dette vil si at man enten har

Nec(F–>G)êw eller at Pr(F&G,F&¬G)êw. I det første tilfelle har man åpenbart siden S5-teoremene inngår i S (Aw)(Fêw –> Gêw). Dette og definisjonen av Sm impliserer at Sm(F) Inkl Sm(G). Men siden Max(¶;w,Sm(F)) Inkl Sm(F) følger Max(¶;w,Sm(F)) Inkl Sm(G) som er det vi ønsker.

I det andre tilfellet har vi ved hjelp av Lemma 2.13 at:

(1) (Sm(F)ΩSm(G)) Q;(¶;w) (Sm(F)Ω Sm(¬G)). Videre må man ha at Pos(F&¬G)êw og at Pos(F)êw. Disse to tingene innebærer at Sm(F&¬G)≠ø og at Sm(F)≠ø. I lys av Lemma 2.14 følger herav:

(2) Max(¶;w,Sm(F&¬G)) ≠ø & Max(¶;w,Sm(F))≠ø.

Fra (1) og (2) samt Teorem 3.31 i Avsnitt A følger så det man ønsker, nemlig Max(¶;w,Sm(F)) Inkl Sm(G).

(b) Vi gir så et bevis for kondisjonalen mot venstre i teoremet. Anta at (1) Max(¶;w,Sm(F)) Inkl Sm(G). Vi sondrer mellom to tilfeller:

Tilfelle (1): Sm(F) Inkl Sm(G). Da har man (Aw)(wêW &Fêw –> Gêw). Herav følger (Aw)(wêW –> (F–>G)êw). Men da Nec(F–>G)êw. Siden AP1êw har man da E(G,F)êw.

Tilfelle (2): ¬(Sm(F) Inkl Sm(G)). Fra dette følger Sm(F&¬G)≠ø og Sm(F)≠ø. Fra dette, (1) og Teorem 3.31 i Avnitt A følger:

(Sm(F)ΩSm(G)) Q;(¶;w) (Sm(F)Ω Sm(¬G)). Ved hjelp av definisjonen av Q;R[4] og Lemma 2.13 gir dette en Pr(F&G,F&¬G)êw og derfor siden AP1 er et teorem i S at E(F,G)êw. Dermed har vi gitt et fullstendig bevis for satsen. **Q.E.D.**

Lemma 2.16 Anta Th(P2) Inkl Th(S) og at MaxK;s(Δ). Anta videre at wêW;<Δ,S> og F,G,HêFm(L;S). Da gjelder:

(i) Pr;c(F,G,H) <–> (Sm(F)Ωm(H)) Q;(¶;w)(Sm(G)Ωm(H))

(ii) Ekv;c(F,G,H) <–> (Sm(F)Ωm(H)) E;(¶;w)(Sm(G)Ωm(H))

Bevis: Siden AP2 og AP3 er teoremer i S gitt forutsetningene i teoremet er satsen en umiddlbar følge av Lemma 2.13 og definisjonene av E;R og Q;R som er gitt i Avsnitt A. **Q.E.D.**

Vi definerer en valusajon V;<S,Δ> over den kanoniske modellen på den følgende måten:

Definisjon 2.17 Anta MaxK;S(Δ) & pêFm(L;S) & pêP;<m,n,k>(L;S).
Da setter vi:

(i) V;<Δ,S>(p) = Sm;<Δ,S>(p)

I det følgende sløyfer vi indeksen "<Δ,S>" i uttrykket "V;<Δ,S>(p)" og bare skrive: "V(p)".

Videre definerer vi visse funksjoner <*f*(w)>/wêW/ og en relajon CR slik:

Definisjon 2.18 Anta Th(P3) Inkl Th(S) og dessuten at MaxK;S(Δ). Da setter vi:

(i) CR;<Δ,S> = Mg(<w1,w2>: w,w2êW;<Δ,S> &
(AF)(O(F)êw1 –> Fêw2))

(ii) *f*;<Δ,S> = Mg(<Mg(Sm;<Δ;S>(F):G(F)êw,w>: wêW;<Δ,S>)

4 Se Definisjon i Avsnitt A.

Igjen er det slik at vi i det følgende sløyfer "<Δ;S>" i uttrykkene "CR;<Δ,S>" og "f;<Δ,S>" og bare skriver "CR" og "f".

La oss så gi bevis for:

Lemma 2.19 Anta Th(P3) Inkl Th(S) & MaxK;S(Δ) & wêW;<Δ,S>. Da gjelder:
O(F)êw <–> (Aw')(<w,w'>êCR –> Fêw)

Bevis: Kondisjonalen mot høyre følger umiddelbart ved hjelp av Definisjon 2.18. Anta (1) ¬(O(F)êw). Det følger da at (¬O(F))êw og derfor at
(2) (¬O(¬¬F)) êw. La oss sette ∏ = {¬F}U Mg(B: O(B)êw). Vi ønsker å vise at ∏ er konsistent med hensyn på systemet S. Anta det motsatte. Da finnes
(3) B;1,...,B;nêMg(B: O(B)êw) slik at ¬F & B;1&...&B;n –> A&¬A er et teorem i S. Da må B;1&....&B;n –> F være et teorem i S. Men da må også:

O(B;1)&....&O)B;n) –> O(F) være et teorem i S. Men dette, (1) og (3) gir en en motsigelse. ∏ er altså konsistent med hensyn på S. Det finnes følgelig w;1 der MaxK;S(w;1) og ∏ Inkl w;1. Vi ønsker å vise at w;1 Sub;S w. Siden ¬O(F)êw har man at Pos(¬F)êw siden AP4-4 er med i teoremene i S. Videre har vi av samme grunn at Mg(C: Nec(C)êw) Inkl Mg(C: O(C)êw). Det følger derfor at

{¬F}UMg(C: Nec(C)êw) Inkl w;1 & Pos(¬F)êw. Fra dette og definisjon av Sub;S følger w;1 Sub;S w. Men da må vi, i lys av konstruksjonen av W, ha at w;1êW siden wêW. Det følger videre i lys av konstruksjonen av w;1 at:

(AF)(O(F)êw –> Fêw;1). Men da <w,w1>êCR. Men vi har også at ¬(Fêw). Dette motsier høyre siden i konsekventen i teoremet og viser at kondisjonalen mot venstre i denne må holde. **Q.E.D.**

Lemma 2.20 Anta Th(P3) Inkl Th(S) & MaxK;S(Δ) & wêW;<Δ,S>. Da gjelder:
(Ax)(Ay)(x,y Inkl W;<Δ,S> & x,yêf(w) –> x=y)

Bevis: Anta forutsetningene i teoremet holder og at x,y Inkl W & x,yêf(w). Dette og Definisjon 2.18 impliserer at det finnes F1 og F2 slik at:

x= Sm(F1) & G(F1)êw & y = Sm(F2) & G(F2)êw. Siden
(G(F1) & G(F2) –> Nec(F1<–>F2))êw har vi at Nec(F1 <–> F2)êw. Men dette impliserer x= Sm(F1)=Sm(F2)=y. **Q.E.D.**

Lemma 2.21 Anta Th(P3) Inkl Th(S) & MaxK;S(Δ) Anta videre at:
X Inkl W;<Δ,S> & wêW;<Δ,S> & xêf(w).
Da gjelder om FêFm(L;S):

(i) Max(¶;w,x) Inkl Sm(F) –> Mg(w': <w,w'>êCR) Inkl Sm(F).

Bevis: Siden xêf(w) følger det at det finnes F1 slik at (1) x=Sm(F1) & G(F1)êw. Anta (2) Max(¶;w,x) Inkl Sm(F). Fra dette og (1) følger:

Max(¶;w,Sm(F1)) Inkl Sm(F). Ved hjelp av Lemma 2.15 følger herav
(3) E(F,F1)êw. Men siden AP4-3 er et teorem i S følger fra dette at:

(G(F1) –>(E(F,F1) <–> O(F)))êw. Dette, (1) og (3) impliserer O(F)êw. Men dette og Lemma 2.19 impliserer Mg(w': <w,w'>êCR) Inkl Sm(F). **Q.E.D.**

Lemma 2.22 Anta Th(P3) Inkl Th(S) & MaxK;S(Δ) Anta videre at:
X Inkl W;<Δ,S> & wêW;<Δ,S> & xêf(w).
Da gjelder om FêFm(L;S):
(i) Mg(w': <w,w'>êCR) Inkl Sm(F) –> Max(¶;w,x) Inkl Sm(F).

Bevis: Fra forutsetningen xêf(w) følger, i lys av definisjonen av f, at det finnes F1 der (1) x=Sm(F1) & G(F1)êw. Anta Mg(w': <w,w'>êCR) Inkl Sm(F). Fra dette og Lemma 2.19 følger (2) O(F)êw. Men siden AP4-3 er et teorem i S har man:
(G(F1) –>(E(F,F1) <–> O(F)))êw. Dette (1) og (2) impliserer E(F,F1)êw som i lys av Lemma 2.15 og (1) impliserer Max(¶;w,x) Inkl Sm(F). **Q.E.D.**

Lemma 2.23 Anta aksiomene Det 1 og Det 2 er blandt teoremene i systemet S. Anta MaxK;S(Δ) & wêW;<Δ,S>. Da gjelder for alle x,yêW;<Δ,S> :
(i) <x,y>êR*;w –> (Aw')(w'êW –> <x,y>êR*;w')
(ii) ¬(<x,y>êR*;w). –> (Aw')(w'êW –> ¬(<x,y>êR*;w'))
(iii) <x,y>êL*;w –> (Aw')(w'êW –> <x,y>êL*;w')
(iv) ¬(<x,y>êL*;w). –> (Aw')(w'êW –> ¬(<x,y>êL*;w'))

Bevis: Først bemerker vi at Det 1 er ekvivalent med:
Det 1˚ Pr(F,G) –> Nec(Pr(F,G)). Vi bruker denne versjonen av aksiomet i det følgende bevis.
Ad (i): Anta <x,y>êR*;w Ifølge definisjonen av R*;w finnes det da formler F1, F2 slik at:
(1) Pr(F1,F2)êw & xêr;w(F1) & yêr;w(F2). La w' være et vilkårlig element i W. Fra (1) og det at Det 1˚ er et teorem i S følger det at man har: Nec(Pr(F1,F2))êw. Herav kan man slutte at (2) Pr(F1,F2)êw'. Fra den andre konjunkten i (1) følger:
(3) xêSm(F1) & (AB)(Pr(F1,B)êw –> ¬(xêSm(F1)). Anta for reduktio ad absurdum at (4) Pr(F1,B)êw' & xêSm(B) for en eller annen formel B i L;S. Siden Det 1˚ er med i w' har man at Nec(Pr(F1,B)êw'. Herav følger Pr(F1,B)êw og derfor i lys av den andre konjunkten i (3) at ¬(xêSm(B)). Dette strider åpenbart mot (4). Man må altså ha:
(5) xêSm(F1) & (AB)(Pr(F1,B)êw' –> ¬(xêSm(B))). Men dette innebærer at (6) xêr;w'(F1). På en helt analog måte viser man at (7) xêr;w'(F2). Men (2), (6) og (7) impliserer <x,y>êR*;w'.
Ad (ii): Anta (Ew')(w'êW & <x,y>êR*;w') for å vise at <x,y>êR*;w. Med andre ord, anta at <x,y>êR*;w' for noe w'. Da kan man vise at <x,y>êR*;w på nøyaktig samme måte som den som ble demonstrert under punkt (i). Dette viser at (ii) holder.
Vi overlater punkt (iii) og (iv) til leseren. **Q.E.D.**

Lemma 2.24 Anta aksiomene Det 1 og Det 2 er blandt teoremene i systemet S. Anta MaxK;S(Δ) & wêW;<Δ,S>. Da gjelder for alle x,yêW:<Δ,S>:
(i) <x,y>ê¶;w –> (Aw')(w'êW –> <x,y>ê¶;w')
(ii) ¬(<x,y>ê¶;w). –> (Aw')(w'êW –> ¬(<x,y>ê¶;w'))
(iii) <x,y>êE;w –> (Aw')(w'êW –> <x,y>êE;w')
(iv) ¬(<x,y>êE;w). –> (Aw')(w'êW –> ¬(<x,y>êE;w'))

Bevis: Denne satsen følger ved hjelp av Lemma 2.23 og definisjonene av ¶;w og E;w. Vi overlater til leseren å gi en detaljert verifikasjon av satsen. Her gir vi bare beviset for (i) for eksemplets skyld. Anta <x,y>ê¶;w. Det er da to muligheter:

Tilfelle (1): x,yêC;w & <x,y>êR*;w. Da har man:

<x,x>êL*;w & <y,y>êL*;w & <x,y>êR*;w. Fra dette og Lemma 2.23 følger om w'êW at <x,x>êL*;w' & <y,y>êL*;w' & <x,y>êR*;w'. Men dette innebærer at x,yêC;w' & <x,y>êR*;w' og derfor at <x,y>ê¶;w'.

Tilfelle (2): xêC;w & yê(W– C;w). Da har man <x,x>êL*;w & ¬(<y,y>êL*;w). Anta w'êW. Da har man ved hjelp av Lemma 2.23 at <x,x>êL*;w' & ¬(<y,y>êL*;w'). Dette impliserer xêC;w' & yê(W– C;w'). Fra dette har vi så i sin tur ved hjelp av definisjonen av ¶;w' at <x,y>ê¶;w'.

Siden man i begge tilfelle har <x,y>ê¶;w' følger naturligvis at følgende er tilfelle: (Aw')(w'êW –> <x,y>ê¶;w'). **Q.E.D.**

Den følgende hjelpesetning er helt avgjørende:

Lemma 2.25 Anta MaxK;S(Δ) og at

(i) M=<W,<¶;w>/wêW,V> om Th(P0) Inkl Th(S) Inkl Th(P2Det)

og at:

(ii) M=<W,<¶;w>/wêW,<*f*(w)>/wêW/,CR,V>
om Th(P0) Inkl Th(S) Inkl Th(P2Det). Da gjelder:
(Aw)(wêW –> (True(F,w,M,L;S) <–> Fêw))

Bevis: Satsen bevises ved induksjon på kompleksiteten av parene i Prod(W,Fm(L;S)) i det et slikt par <i,F> har større kompleksitet enn et annet <j,G> hvis og bare hvis lengden til F er større en lengden til G. Er F= ¬G eller
G–>H for noen formler G og H er satsen temmelig triviell. Er F = Pr(G,H) eller Ekv(G,H) følger satsen ved hjelp av Lemma 2.13. Er F= E(G,H) følger den ved hjelp av Lemma 2.15. Er F = Ekv;c(G,H,A) eller Pr;c(G,H,A) bruker man Lemma 2.16 og er F = O(B) brukes Lemma 2.19. Er F= G(B) går man frem på følgende vis:

Etter induksjonshypotesen har man:

(1) Mg(w: True(B,w,M,L;S)) = Mg(w: Bêw) = Sm(B). Nå har man:

True(G(B),w,M,L;S) <–> Mg(w: True(B,w,M,L;S))ê*f*(w)
<–> Sm(B)ê*f*(w)
<–> Sm(B) = Sm(H) for noe H der G(H)êw.

Det er klart at høyre komponent i den siste bikondisjonalen her holder om G(B)êw. Anta på den nnen side at (2) Sm(B) = Sm(H) & G(H)êw. Da følger i lys av definisjonen av Sm at (Aw)(wêW –>(Bêw <–> Hêw)). Herav, siden w er en maksimalt konsistent mengde: (Aw) (wêW –> (B<–>H)êw). Men fra dette følger Nec(B<–>H)êw. Siden (Nec(B<–>H)& G(H). –>G(B))êw har man at G(B)êw.

Dette avslutter beviset for Lemma 2.25. **Q.E.D.**

I det følgende bruker vi "P0DetMod(M)",..., "P3DetMod(M)" som forkortelse for henholdsvis "M er en P0Det-modell",...,"M er en P3Det-modell".

Vi har nå samlet sammen så mange hjelpesetninger at vi nå kan bevise det følgende fullstendighetsresultat. Dette er et hovedresultat i dette kapitlet.

Teorem 2.26 La S være et av systemene P0 – P3, P0Det – P3Det. Da gjelder:
(AF)(FêFm(L;S) –> (Val;S(F) –> Th(S,F)))

Bevis: Anta F0êFm(L;S) og ¬Th(S,F0). Vi ønsker da å vise at:
(1) (EM)(Ew)(SMod(M) & wê(M);1 & True(¬F0,w,M,L;S)).
Fra (1) følger umiddelbart ¬Val;S(F0). Siden ¬Th(S,F0) har vi at {¬F0} er en S-konsistent mengde. Det finnes da en maksimalt S-konsistent teori Δ som er slik at {¬F;0} Inkl Δ.

Tilfelle (a): S er et av systemene P0, P1, P3, P0Det, P1Det eller P2Det. Vi betrakter da den kanoniske modellen:

M= <W, <¶:w>/wêW/, V>. I lys av Teorem 2.8, Lemma 2.14 og Lemma 2.23 kan vi konkludere emd at SMod(M). Siden ΔêW;Δ,S> har vi ved hjelp av Lemma 2.25 at True(F,w,M,L;S) <–> Fêw for alle wêW og alle FêFm(L;S). Setter vi w0 = Δ har vi derfor: True(¬F0,w0,M,L;S) <–> ¬F0êw0. Men ¬F0ê{¬F0}=Δ=w0. Derfor True(¬F0,w0,M,L;S). dette viser at (1) holder.

Tilfelle (b): S er enten P3 eller P3Det. I så tilfelle betrakter vi den kanoniske modellen:

M=<W,<¶;w>/wêW,<*f*(w)>/wêW/,CR,V>

der komponentene er konstruert slik som vist i denne paragrafen. I lys av Teorem 2.7, Lemma 2.14, Lemma 2.20 – Lemma 2.22 og Lemma 2.23 følger at SMod(M). Fra Lemma 2.25 har vi da på samme måte som i foregående tilfelle True(¬F0,w0,M,L;S) om man setter w0=Δ. Dette viser at (1) også holder i dette tilfellet. Dette avslutter vårt bevis for satsen. **Q.E.D.**

Dermed har vi nådd det ene av de to mål vi satte oss i dette kapitlet, nemlig å vise fullstendigheten til de systemene vi beskrev i Avsnitt B. Vår neste oppgave er å vise at kalkylene P0, P1 og P2 har en avgjørelsesprosedyre. I de to neste paragrafene, §3 og §4 tar vi for oss denne oppgaven.

§3 Preliminære resultater av relevans for resultatene om avgjørbarhet.

I dette avsnittet vil vi gi bevis for en rekke hjelpesetninger som er av betydning i vårt bevis for at preferanselogikken P0 har en avgjørelsesprosedyre. Satsene har imidlertid også en viss interesse i seg selv.

I §1 har vi definert de to relasjonene Q;R og E;R. Strengt tatt er Q en funksjon som til enhver relasjon R tilordner en ny relasjon Q;R. Det samme kan sies i tilknytning til uttrykket "E;R". I det følgende skal vi derfor skrive "Q(R)" og "E(R)" i stedet for "Q;R" og "E;R" for tydeligere å understreke at Q og E er funksjoner. Gitt Q og E definerer vi funksjonen J slik:

Definisjon 3.1 J(R) = Q(R)UE(R)

Siden <Q(R),E(R)> utgjør der vi i Avsnitt A kalte et preferansesystem om R er en preferanserelasjon vil J(R) være den preferanserelasjonen som er bestemt av preferansesystemet <Q(R),E(R)>. I det følgende betegner √(R) klassen av alle de delmengder av domenet til R som inneholder R-maksimale elementer. Vi definerer:

Definisjon 3.2 √(R) = Mg(x: x Inkl D(R) & Max(R,x)≠ø)

Strengt tat ter det ikke riktig at J(R) er en preferanserelasjon over Pt(D(R)) om R er en preferanserelajon. Dette er bare korrekt om vi begrenser J(R) til √(R). Man har altså at restriksjonen av R til √(R), Rest(J(R),√(R)) er en preferanserelasjon om R er det:

Teorem 3.3 Pref(R) –> Pref(Rest(J(R),√(R))

R er som bekjent en ekvivalensrelasjon om den er refleksiv, symmetrisk og transitiv. Vi skal tillate oss å bruke "ERel(R)" som forkortelse for "R er en ekvivalensrelasjon". En ekvivalensrelasjon over en mengde X spalter opp i en mengde av innbyrdes disjunkte, ikke-tomme mengder som samlet utttømmer X. Mengden av alle disse ekvivalensklassene som R spalter opp X i kaller vi kvotientmengde til X med hensyn på R. Vi betegner denne med "[X,R]". Vi gir den følgende helt formelle definisjon av "ERel(R)" og "[X,R]":

Definisjon 3.4(a) Man har ERel(R) hvis og bare hvis R oppfyller de følgende krav:

(i) Rel(R)
(ii) (Ax)(Ay)(<x,y>êR –> <y,x>êR)
(iii) (Ax)(Ay)(Az)(<x,y>êR & <y,z>êR –> <x,z>êR)
(iv) (Ax)(xêD(R) –> <x,x>êR)
(b) [X,R] = Mg(Mg(x: xêX &<x,y>êR): yêX)

Studerer man operasjonen J skulle det forsåvidt være klart at man kan iterere denne så mange ganger som man vil. Definerer man R;n induktivt ved:
(i) R;0 = R og (ii) R;(n+1) = Rest(J(R;n),√(R;n)) skulle det være klart i lys av Teorem 3.3 at man har:

Teorem 3.5 Pref(R;0) –> (An)(nêN–> Pref(R;n))

Vi skal nå bevise den følgende hjelpesetning:

Lemma 3.6 Anta Pref(R) og at ERel(~) Anta videre at de følgende betingelser er oppfylt:

(i) D(~) = D(R)
(ii) Mg(a;i: iêK) Inkl [D(R),~]
(iii) (Ax)(xê[D(R),~] –> Max(R,x)≠ø)
(iv) X= UN/iêK/(a;i)
(v) Max(J(R), Mg(a;i: iêK))≠ø

Er disse betingelsene oppfylt gjelder:
Max(R,X) Inkl UN(Max(J(R), Mg(a;i : iêK)))

Bevis: Anta forutsetningene i satsen holder og anta dessuten for reduktio ad absurdum at :
(1) x0êMax(R,X) og (2) ¬(x0êUN(Max(J(R), Mg(a;i : iêK)))) for noe x0. Fra (1) har vi ved hjelp av definisjonen av Max-operatoren og forutsetning (iv) at x0êX=UN/iêK/(a;i). Det følger derfor at (3) x0êa;j for noe jêK. Fra (2) følger:
(4) (Ay)(yêMax(J(R), Mg(a;i : iêK)) –> ¬(x0êy)). Dette sammen med (3) gir en:
(5) ¬(a;jêMax(J(R), Mg(a;i: iêK)))
Fra forutsetning (v) følger yêMax(J(R), Mg(a;i: iêK)) for noe y. Dette innebærer at yêMag(a;i: iêK) og derfor at y= x;k for noe kêK. Det følger at:

(6) a;kêMax(J(R), Mg(a;i: iêK)). Fra forutsetningene (ii) og (iii) følger:
(7) (Aj)(jêK –> Max(R,a;j)≠ø) Derfor har vi:
(8) Mg(a;i: iêK) Ink √(R).

Anta man <a;j,a;k>êQ(R) strider dette mot (6). Likeledes strider <a;j,a;k>êE(R) mot (6) og (5). Man må derfor ha <a;k,a;j>êQ(R). Det må følgelig finnes y1,y2 slik at:

(9) y1êMax(R,a;k)
(10) y2êMax(R,a;j)
(11) y1R*y2.

Fra (1) og (3) har man, siden a;j Inkl X at at x0êMax(R; a;j). Fra dette følger i lys av (10) at y2 ~:R x0. Dette og (11) impliserer y1R* x0. Men i lys av (9) har man y1êMax(R,a;k) Inkl a;k Inkl X. Det finnes derfor y slik at yêX & yR*x0. Men dette strider åpenbart mot (1). Dette avslutter beviset. **Q.E.D.**

Lemma 3.7 Anta Pref(R) & x,y Inkl Dom(R) & ø≠Max(R,x) Inkl y Inkl x. Da gjelder at: Max(R,x) = Max(R,y).

Bevis: (a) Anta forutsetningen i teoremet holder. Da har man:

(1) Max(R,x) Inkl y Inkl x. Anta for vilkårlig z at (2) zêMax(R,x). Da følger umiddelbart at at zêx og derfor i lys av (1) at zêy. Fra (2) følger imidlertid også (Aw)(wêx &wRz –> zRw). Men fra dette følger i lys av (1) at (Aw)(wêy &wRz –> yRw). Dette sammen med det at zêx impliserer zêMax(R,y). Dette viser at inklusjonen mot høyre i konsekventen i teoremet holder.

(b) Anta på den annen side for vilkårlig w at (1) wêMax(R,y). Siden Max(R,x)≠ø har vi for noe z at (2) zêMax(R,x). Fra dette og definisjonen av Max følger:

(3) zêx & (Av)(vêx &vRz –> zRv).

Siden man etter forutsetningene har at x Inkl y følger zêy fra (3). Fra (1) har man:

(4) wêy & (Av)(vêy & vRw –> wRv). Siden zêy følger herav: (5) zRw –> wRz. Siden wêy Inkl x har man fra (3) at wRz –> zRw. Dette og (5) gir en zRw <–> wRz. Siden Pref(R) og R er total følger derfor z~;R w. Nå hadde vi z,wêx. I lys av (2) og det at z~;Rw har vi derfor wêMax(R,x). Men w var et vilkårlig element i Max(R,y). Det følger at Max(R,y) Inkl Max(R,x). **Q.E.D.**

Lemma 3.8 Anta Pref(R) og at ERel(~) Anta videre at de følgende betingelser er oppfylt:

(i) D(~) = D(R)
(ii) Mg(a;i: iêK) Inkl [D(R),~]
(iii) (Ax)(xê[D(R),~] –> Max(R,x)≠ø)
(iv) X= UN/iêK/(a;i)

Er disse betingelsene oppfylt gjelder:

Max(R,X)≠ø –> Max(J(R), Mg(a;i: iêK))≠ø

Bevis: Anta forutsetningene holder. Anta for reduktio ad absurdum følgende:

(1) Max(R,X)≠ø og (2) Max(J(R), Mg(a;i: iêK))=ø.

Fra (2) følger i lys av definisjonen av Max at:

¬(Ey)(yêMg(a;i: iêK) & (Ez)(zêMg(a;i: iêK) & <z,y>êQ(R))). Dette innebærer: (3) (Aj)(jêK –> (Ep)(pêK & <a;p, a;j>êQ(R))). Fra (1) har vi at det finnes x0 der (4) x0êMax(R,X). Siden X= UN/iêK/(a;i) følger (5) x0êa;j for noe jêK. Anta, mot formodning,

at det finnes k der (6) kêK & <a;k,a;j>êQ(R). Fra definisjonen av Q(R) følger i så fall eksistensen av y1,y2 der man har:

(7) y1êMax(R, a;k)
(8) y2êMax(R,a;j)
(9) y1R*y2.

Fra (4), (5) og det at a;j Inkl X følger x0êMax(R,a;j). Dette sammen med (8) impliserer at x0 ~;R y2. I lys av (9) har man da: (10) y1R*x0. Men:

(11) y1êa;k Inkl X. Man ser at (10) og (11) åpenbart strider mot (4). Det følger at det ikke kan fines k der (6) holder. Derfor:

(12) ¬(Ek)(kêK & <a;k,a;j>êQ(R)).

Men dette og (5) impliserer (Ej)(jêK& x0êa;j & ¬(Ek)(kêK & <a;k,a;j>êQ(R))). Herav: (Ej)(jêK & ¬(Ek)(kêK & <a;k,a;j>êQ(R))). Dette strider åpenbart mot (3). **Q.E.D.**

I lys av Lemma 3.8 impliserer Lemma 3.6 den følgende sats:

Lemma 3.9 Anta Pref(R) og at ERel(~) Anta videre at de følgende betingelser er oppfylt:

(i) D(~) = D(R)
(ii) Mg(a;i: iêK) Inkl [D(R),~]
(iii) (Ax)(xê[D(R),~] –> Max(R,x)≠ø)
(iv) X= UN/iêK/(a;i)
(v) Max(R,X)≠ø

Er disse betingelsene oppfylt gjelder:

Max(R,X) Inkl UN(Max(J(R), Mg(a;i : iêK)))

Fra Lemma 3.7 og Lemma 3.9 følger nå:

Lemma 3.10 Anta Pref(R) og at ERel(~) Anta videre at de følgende betingelser er oppfylt:

(i) D(~) = D(R)
(ii) Mg(a;i: iêK) Inkl [D(R),~]
(iii) (Ax)(xê[D(R),~] –> Max(R,x)≠ø)
(iv) X= UN/iêK/(a;i)
(v) Max(R,X)≠ø

Er disse betingelsene oppfylt gjelder:

Max(R,X) = UN(Max(J(R), Mg(a;i : iêK)))

Bevis: Fra forutsetningene i satsen er det klart at UN(Max(J(R), Mg(a;i : iêK))) Inkl X. Fra dette, Lemma 3.7 og Lemma 3.9 slutter vi så at satsen holder. **Q.E.D.**

Den følgende hjelpesetning er av en mer substansiell natur:

Lemma 3.11 Anta Pref(R) og at ERel(~) Anta videre at de følgende betingelser er oppfylt:

(i) D(~) = D(R)
(ii) (Ax)(xê[D(R),~] –> Max(R,x)≠ø)
(ii) A =Mg(a;i: iêK1) & Mg(a;i: iêK1) Inkl [D(R),~]
(ii) B =Mg(b;i: iêK2) & Mg(b;i: iêK2) Inkl [D(R),~]

(iv) X= UN/iêK1/(a;i) & Y= UN/iêK2/(b;i)
(v) Max(R,X)≠ø & Max(R,Y) ≠ø
Er disse betingelsene oppfylt gjelder:
<A,B>êJ(J(R)) <–> <X,Y>êJ(R)

Bevis: (a) Anta forutsetningene i teoremet holder og at <X,Y>êJ(R). Ved hjelp av definisjonen av J(R)må det da finnes x1,x2 der:
(1) x1êMax(R,X)
(2) x2êMax(R,Y) og
(3) x1Rx2.
Fra (1), forutsetningene og Lemma 3.10 følger:
(4) x1 êMax(R, UN(Max(J(R),A))) Inkl UN(Max(J(R),A))
Likeledes har man fra (2), forutsetningene og Lemma 3.10 at:
(5) x1 êMax(R, UN(Max(J(R),B))) Inkl UN(Max(J(R),B)) I lys av (4) og (5) må det finnes c1,c2 der:
(6) x1êc1 & c1êMax(J(R),A) = Max(J(R),Mg(a;i: iêK1))
(7) x2êc2 & c2êMax(J(R),B) = Max(J(R),Mg(b;i: iêK2))
Fra (6) følger c1êMg(a;i: iêK) og derfor at c1 = a;j Inkl X for noe jêK. Derfor har man (8) c1 Inkl X. Vi ønsker å vise at x1êMax(R,c1). Anta derfor at y er et vilkårlig element der yêc1 & yRx1. Da har man i lys av (8) at yêX & yRx1. Fra dette og (1) følger x1Ry. Siden x1êc1 har vi:
(9) x1êMax(R,c1).
Likeledes har vi fra (7) og forutsetningene at x2êc2 Inkl Y og derfor:
(10) x2êMax(R,c2)
Fra (3), (9) og (10) følger <c1,c2>êJ(R). I lys av (6) og (7) følger da <A,B>êJ(J(R)) som nettopp er det vi ønsker.
(b) Anta forutsetningene holder og at <A,B>êJ(J(R)). Fra definisjonen av J har man da at det må finnes c1,c2 og x1,x2 slik at:
(1) c1êMax(J(R),A) & c2êMax(J(R),B)
(2) x1êMax(R,c1) & x2êMax(R,c2) & x1Rx2.
Vi ønsker å vise x1êMax(R, UN(Max(J(R),A))). Det er da tilstrekkelig å vise:
(+) x1êUN(Max(J(R),A)) & (Ay)(yêUN(Max(J(R),A)) & yRx1 –> x1Ry).
Fra (1) og (2) har vi x1êUN(Max(J(R),A)). Anta for vilkårlig y at
(3) yêUN(Max(J(R),A)). Dette innebærer at det finnes b der vi har:
(4) yêb & bêMax(J(R),A). Fra (1) har man (5) c1êMax(J(R),A). Det følger at (6) c1~;J(R) b. Dette vil si at det finnes z1,z2 der:
(7) z1êMax(R,c1) & z2êMax(R,b) & z1~;R z2. Siden yêb har man y~;R z2 v z2R*y. Da følger
(8) y~;R z1 v z1R*y.
Men nå har vi x1êMax(R,c1). Derfor har vi i lys av (7) at z1~;Rx1. Da har vi ved hjelp av (8) at y~;R x1 v x1R*y. Dette er ekvivalent med at ¬(yR*x1). Dette er i sin tur ekvivalent med yRx1 –> x1Ry. dermed har vi gitt et bevis for (+). Fra (+), forutsetningene i teoremet og Lemma 3.10 følger:
(9) x1êMax(R,X).
Ved et helt analogt resonnement som benytter Lemma 3.10 finner man:
(10) x2êMax(R,Y)
Men den siste konjunkten i (2), (9) og (11) impliserer <X,Y>êJ(R). **Q.E.D.**

Som et umiddelbart korollar til Lemma 3.11 har man:

Lemma 3.12 Anta Pref(R) og at ERel(~) Anta videre at de følgende betingelser er oppfylt:

(i) D(~) = D(R)
(ii) (Ax)(xê[D(R),~] –> Max(R,x)≠ø)
(ii) A =Mg(a;i: iêK1) & Mg(a;i: iêK1) Inkl [D(R),~]
(ii) B =Mg(b;i: iêK2) & Mg(b;i: iêK2) Inkl [D(R),~]
(iv) X= UN/iêK1/(a;i) & Y= UN/iêK2/(b;i)
(v) Max(R,X)≠ø & Max(R,Y) ≠ø

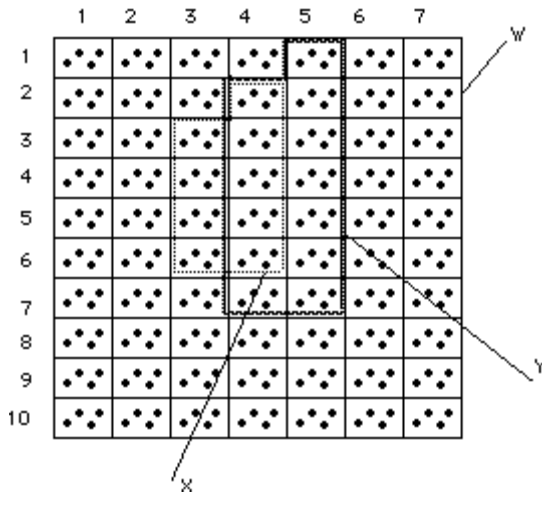
Er disse betingelsene oppfylt gjelder:

(a) <A,B>êQ(J(R)) <–> <X,Y>êQ(R)
(b) <A,B>êE(J(R)) <–> <X,Y>êE(R)

Beviset for at dette følger fra lemma 3.11 overlates til leseren.

Den følgende figur er ment som en uformell illustrasjon til innholdet i Lemma 3.11 og Lemma 3.12. Vi tenker oss at alle punktene innenfor kvadratet representerer elementene i domenet til en relasjon R. Dette skal være e preferanserelasjon og man kan tenke seg den definert på følgende måte. Er x og y to punkter som ligger på samme rad har vi x~y. Er x et punkt som ligger i en rad som ligger over den raden som punktet y ligger i tenker vi oss at xR*y. De enkelte ruter innenfor kvadratet benevnes <1,2>, <4,3> etc. Ruten <4,3> er den som er felles for rad 4 og kolonne 3.

FIGUR 1



§4 Om eksistensen av en avgjørelsesprosedyre for preferanselogikken P0.

Vi definerer først en ekvivalensrelasjon på følgende måte.

Definisjon 4.1 <x1,x2>ê ~(L;A,Δ,M) <–>
(P0Mod(M) & Δ Inkl Fm(L;A) & x1,x2ê(M);1 &

(AF)(FêΔ –> (True(F,x1,M,L;A) <–> True(F,x2,M,L;A)))

Som det fremgår er ~(L;A,Δ,M) en ekvivalensrelasjon. ~ er altså strengt tatt en funksjon som til ethvert triple <L,Δ,M> der M er en modell for L og Δ er en mengde av formler i L tilordner dette en bestemt dette en bestemt ekvivalens-relasjon over verdnene i modellen M, ie. elementene i (M);1. Så lenge M og L tenkes å være fiksert – og lette å finne frem til på bakgrunn av sammenhengen – skriver vi bare "~(Δ)" i stedet for det langt mer kompliserte uttrykket "~(L,Δ,M)".

Definisjon 4.2 [u](L;A,Δ,M) <–> Mg(z: zê(M);1 & <u,z>ê ~(L;A,Δ,M))

Det fremgår av denne definisjonen at [u](L;A,Δ,M) er ekvivalensklassen til u relativt til ekvivalensrelasjonen ~(L;A,Δ,M).

Fra de to definisjonene som nå er gitt ser man umiddelbart at følgende sats holder:

Lemma 4.3 Anta P0Mod(M) & Δ Inkl Fm(L;A) Da gjelder:
(i) ERel(~(L;A,Δ,M)
(ii) (Au)(uê(M);1 –> [u](L;A,Δ,M) Inkl (M);1)
(iii) (Au)(uê(M);1 –> [u](L;A,Δ,M)≠ø)
(iv) (Ax)(Ay)(x,yê(M);1 & x≠y –> [x](L;A,Δ,M) Ω [y](L;A,Δ,M) =ø)
(v) (M);1 = UN(Mg([x](L;A,Δ,M): xê(M);1))

Er F en formel i L;A betegner vi klassen av alle subformler i F, inkludert F selv, med "Sub(F)". Det følgende lemma er egentlig temmelig trivielt:

Lemma 4.4 Anta P0Mod(M) & FêFm(L;A) & Cd(Sub(F)) =n. Da gjelder:
Cd([(M);1, ~(L;A,Δ,M)]) ≤ 2^n.

Bevis: Anta forutsetningene holder. I lys av av utvalgsaksiomet må det finnes en funkjon f der
Dom(f) = [(M);1, ~(L;A,Sub(F),M)] og hvor man dessuten har:
(Ax)(xêDom(f) –> f(x)êx)
Vi definerer en funksjon g ved:
g(x) = Mg(H: HêSub(F) & True(H,f(x),M,L;A)) der xêDom(f).
Vi skal vise at g er en-entydig. Anta:
(1) x,yê Dom(f)= [(M);1, ~(L;A,Sub(F),M)] og at x≠y. Fra (1) følger at det finnes u1,u2 der u1,u2ê(M);1 og hvor man har:
(2) x= [u1](L;A,Sub(F),M)
(3) y = [u2](L;A,Sub(F),M)
Fra dette og Lemma 4.1 kan man slutte at xΩy =ø. Siden f(x)êx og f(y)êy følger at:
¬(<f(x),f(y)>ê ~(L;A,Sub(F),M)). Hadde man nå hatt g(x)=g(y) kunne man slutte at:
(AH)(HêFm(L;A) –> (True(H,f(x),M,L;A) <–> True(H,f(y),M,L;A))) og derfor i lys av Definisjon 4.1 at <f(x),f(y)>ê ~(L;A,Sub(F),M). Men det er umulig. Det følger at g(x)≠g(y) og derfor at g er en-entydig. Fra den tredje forutsetningen følger at Cd(Pt(Sub(F))) = 2^n. Nå har man at g(x)êPt(Sub(F)) for alle xêDom(f). Det følger at Cd(Dom(f)) ≤ 2^n og derfor at Cd([(M);1, ~(L;A,Δ,M)]) ≤ 2^n siden

Dom(f) = [(M);1, ~(L;A,Sub(F),M)]. **Q.E.D.**

Lemma 4.5 Anta P0Mod(M) & FêFm(L;A) Anta videre at:
(i) xê [(M);1, ~(L;A, Sub(F),M)]
(ii) wê(M);1
Da gjelder: Max((M);2(w), x) ≠ø

Bevis: Anta forutsetningene holder . Fra (i) følger at det finnes noe u der uê(M);1 & x= [u](L;A,Sub(F),M). Sett per definisjon:
C(u) = Mg(H: HêSub(F) & True(H,w,M,L;A)) om wê(M);1. Da har man:
(AH)(HêC(w) –> True(H,u,M,L;A) og dessuten at:
(AG)(Gê(Sub(F)–C(u) –> ¬True(G,u,M,L;a))
Siden Sub(F) er endelig har man Sub(F) ={B1, ... , Bn} (n≥1) for noen formler B1,...,Bn i L;A. Vi kan anta at C(w) = {B1,...,Bj} og (Sub(F)–C(w))={Bj+1,..,Bn} for et eller annet j der 1≤j≤n. Setter man derfor:
G=(B1&....&Bj& Bj+1,...,Bn} har man (1) True(G,u,M,L;A).
(a) Anta u1êx for et eller annet vilkårlig element u1. Da har man u1ê [(M);1, ~(L;A, Sub(F),M)] og derfor at <u1,u>ê~(L;A,Sub(F),M). I lys av definisjonen av ~ innebærer dette at:
(AH)(HêSub(F) –> (True(H,u1,M,L;A) <–> True(H,u,M,L;A))). Fra dette, (1) og definisjonen av G følger (3) True(G,u1,M,L:A). Siden u1 var vilkårlig har vi vist at x Inkl Sm;<L;A,M>(G).
(b) Anta ¬(u1êx) for vilkårlig u1. Da må det finnes G0 slik at:
(4) G0êSub(F) og
(5) (True(G0,u1,M,L;A) & ¬True(G0,u,M,L;A)) v
(¬True(G0,u1,M,L;A) & True(G0,u,M,L;A))
Man har at G0= Bk for noen kê{1,...,n}. Siden True(G,u,M,L;A) må man ha i kraft av (4) og (5) ha ¬(u1êSm;<L;A,M>(G)).
Fra det som er vist under (a) og (b) følger at ø≠ x=Sm;<L;A,M>(G). Siden M er en P0-modell har man i lys av definisjonen av slike modeller at:
Max((M);2(w), SM(L;A,M>(G))≠ø. Det følger at Max((M);2(w), x) ≠ø. **Q.E.D.**

Lemma 4.6 Anta P0Mod(M) & FêFm(L;A) Anta GêSub(F). Da gjelder:
Mg(u: True(G,u,M,L;A) & uê(M);1) =
UN(Mg([u](L;A,Sub(F),M) : True(G,u,M,L;A) & uê(M);1))

Bevis: Anta forutsetningene i satsen holder.
(i) Anta True(G,u,M,L;A) & uê(M);1. Siden vi åpenbart har at uê[u](L;A,Sub(F),M) i lys av Lemma 4.3 følger at
uêUN(Mg([u](L;A,Sub(F),M) : True(G,u,M,L;A) & uê(M);1)). Dette viser at inklu-sjonen mot høyre holder.
(ii) Anta på den annen side for vilkårlig u1 at:
u1êUN(Mg([u](L;A,Sub(F),M) : True(G,u,M,L;A) & uê(M);1))
Da finnes u;2 som er slik at: u1êMg([u;2](L;A,Sub(F),M) og hvor man har:
(1) True(G,u2,M,L;A) & u2ê(M);1). Det følger at <u1.u2>ê~(L;A,Sub(F),M) og derfor at:
(AH)(HêSub(F) –> (True(H,u1,M,L;A) <–> True(H,u2,M,L;A))). Fra dette og (1) følger True(G,u1,M,L;A) & u1ê(M):1. Dette viser at inklusjonen mot venstre holder. **Q.E.D.**

La nå M være en vilkårlig P0-modell og anta FêFm(L;A). Vi ønsker å definere en ny modell M˚(F), F-filtrasjonen av M. Det er hensiktsmessig å relativisere konstruksjonen til utvalgsfunksjoner. Vi definerer:

Definisjon 4.7 La M= <W, <R;w>/wêW/,V> være en P0-modell. Anta FêFm(L;A) og at f er en utvalgsfunksjon over [W,~(L;A,Sub(F),M]. Da er F-filtrasjonen av M relativt til f , M˚(F,f), strukturen

<W˚, <R˚;w>/wêW˚/, V˚> der de forskjellige komponentene er definert som følger:

(i) W˚ = [W, ~(L;A,Sub(F),M]

(ii) Er wêW˚ og c1,c2êW˚ setter vi:
<c1,c2>êR˚;w = (Ex1)(Ex2)(x1êMax(R;f(w), c1) &
x2êMax(R;f(w), c2) & <x1,x2>êR;f(w))

(ii) Er pêFm(L;A) & pêP;<0,0,0>(L;A) setter vi:
V˚(p) = Mg([u](L;A,Sub(F),M): uêV(p)) om pêSub(F) ellers er
V˚(p) =ø.

Det følgende lemma sier at M˚(F,f) er en P0-modell om M er det.

Lemma 4.8 Anta P0Mod(M). Anta videre at FêFm(L;A) og at f er en utvalgsfunksjon over [(M);1, ~(L;A,Sub(F),M)]. Da har man at M˚(F,f) er en P0-modell.

Bevis: Vi kan anta at M= <W,<R;w>/wêW/,V> og at
M˚(F,f) = <W˚, <R˚;w>/wêW˚/, V˚>
der komponentene oppfyller de krav som er nevnt i Definisjon 4.7. I lys av Lemma 4.4 er det klart at W˚ = [W, ~(L;A,Sub(F),M] er en endelig mengde. Fra definisjonen av R˚;w der wêW˚ skulle det være klart at dette er en preferanserelasjon. At domenet til denne er hele W˚ fremgår av det faktum at alle elementene i W˚ inneholder maksimale elementer med hensyn på R;w der wêW og ethvert wêW er med i et eller annet element i W˚. Dette fremgår av Lemma 4.5. At V˚ er en funksjon som tilordner de diverse setningsbokstavene i L;A elementer i Pt(W˚) skulle være opplagt ut fra definisjonen. Siden W˚ bare inneholder et endelig antall elementer er det klart at enhver delmengde av W˚ inneholder R˚;w-maksimale elementer om wêW˚. Det følger at M˚(F,f) oppfyller kravene K1 og K2 som ble nevnt i definisjoen av en P0-modell. **Q.E.D.**

Lemma 4.9 Anta M= <W, <R;w>/wêW/,V> er en P0-modell. Anta FêFm(L;A) og at f er en utvalgsfunksjon over kvotientmengden til W med hensyn på ~(L;A,Sub(F),M), ie f er en utvalgsfunksjon over [W,~(L;A,Sub(F),M]. Anta videre at GêSub(F) og at wêW. Da gjelder om vi setter

ß(w) = [w](L;A,Sub(F),M) at:

(i) True(G,w,M,L;A) <–> True(G,ß(w),M˚(F,f),L;A).

Denne setningen er helt avgjørende for avgjørbarhetbeviset.

Bevis: Anta forutsetningene holder.

I det følgende skal vi forutsette at L;A og F er fiksert på forhånd. Vi vil derfor istedet for "True(G,w,M,L;A)" skrive "True(F,w,M)". Videre vil vi bare skrive "~" istedet for det mer kompliserte uttrykket "~[L;A,Sub(F), M]". Likeledes skrives bare "[u]" istedet for "[u](L;A,Sub(F),M]". Vi vil også i stedet for "M˚(F,f)" skrive "M˚". Man kan anta at M˚ = <W˚,<R˚;w>/wêW˚/, V˚> hvor komponentene er som angitt i Definisjon 4.7.

Satsen bevises ved induksjon på mengden av subformlene til F. Vi vil altså vise at dersom G er en slik subformel og satsen holder for alle kortere subformler, så holder den også for G.

(i) Anta G=p for en eller annen setningsbokstav i L;A, ie. et element p der pêP;<0,0,0>(L;A). Anta pêSub(F). Da har vi:

True(G,w,M) <–> wêV(p) <–> [w]êV˚(p) <–> True(G,[w],M˚).

Her er den første og den siste bikondisjonalen opplagt. Kondisjonalen mot høyre i den midterste bikondisjonalen er også opplagt. Når det gjelder kondisjonalen mot venstre her bemerker man at dersom [w]êV˚(p) har man at det finnes uêW slik at [w]=[u] & uêV(p). Nå har man imidlertid etter definisjonen av ~ at:

(AG)(GêSub(F) –> True(G,w,M) <–> True(G,u,M)). Siden pêSub(F) og uêV(p) impliserer at True(p,u,M) følger True(p,w,M) og derfor wêV(p). Satsen holder altså i dette tilfellet.

(ii) Induksjonstrinnene for for de setningslogiske konnektivene ¬ og –> er trivielle og overlates til leseren.

(iii) Anta G=Nec(H) for en eller annen H. Da er HêSub(F).

(a) Anta først True(Nec(H),w,M). Da følger: (1) (Aw')(w'êW –> True(H,w',M)). Anta z er et vilkårlig element i W˚. Da har man at z=[u] for noe uêW. Fra dette og (1) følger True(F,u,M). Ved hjelp av induksjonshypotesen har man da at True(H,[u],M) og derfor True(F,z, M). Men z var et vilkårlig element i W˚. Det følger at vi har vist (Az)(zêW˚ –> True(H,z,M). Herav True(Nec(H),[w],M˚)

(b) Anta på den annen side at True(Nec(H),[w],M˚). Da har vi:

(Az)(zêW˚ –> True(H,z,M˚). Anta w' er et vilkårlig element i W. Da har man [w']êW˚. Men da True(H,[w'],M˚). Men fra dette og induksjonshypotesen følger True(H,w,M). Det følger at (Aw')(w'êW –> True(H,w',M)). Men da må man ha True(Nec(H),w,M).

Det som er nevnt under (a) og (b) viser at satsen holder i dette tilfellet.

(iv) Anta (1) G = Pr(H1,H2) for H1,H2êSub(F). Vi må bevise:

(+) True(Pr(H1,H2),w,M) <–> True(Pr(H1,H2),[w],M˚). Nå var f en utvalgsfunksjon over W˚. Vi har derfor at f([w])ê[w]. Dette innebærer at f(w)~w. I lys av at vi nå bruker "~" som forkortelse for "~(L;A,Sub(F),M)" følger at:

(AS)(SêSub(F) –> (True(F,w,M) <–> True(F,f([w]),M))). Siden G=Pr(H1,H2) etter forutsetning er med i Sub(F) følger fra dette at høyre side i (+) er ekvivalent med True(Pr(H1,H2), f([w]),M). Man har altså:

(2) True(Pr(H1,H2),w,M) <–> True(Pr(H1,H2), f([w]),M)

Nå har man videre:

(3) True(Pr(H1,H2), f([w]),M) <–>
<Mg(y: True(H1,y,M),Mg(y: True(H2,y,M)>êQ(R;f([w]))

La oss nå per definisjon sette:

(4) X= Mg(y: True(H1,y,M) & Y = Mg(y: True(H2,y,M)

La oss dessuten sette:

(5) A= Mg([u]: True(H1, [u],M˚) & B= Mg([u]: True(H2, [u],M˚)

Da har man, siden f([w])ê[w], at:

(6) True(Pr(H1,H2),[w],M˚) <–> True(Pr(H1,H2),[f([w])],M˚ <–> <A,B>êQ(R˚;[f([w])])

Siden M er en P0-modell, og derfor oppfyller kravene K1 og K2 som ble nevnt i definisjonen av en slik modell, har vi:

(7) Max(R;w,X)≠ø & Max(R;w,Y)≠ø. I lys av definisjonen av M˚ følger det videre at:

(8) R˚;[f([w])] = Rest(J(R;f([w])), W˚)

Ved hjelp av (4), (5), induksjonshypotesen, og Lemma 4.6 følger:

(9) X= UN(A) & Y = UN(B). Men fra dette, (4) – (7), (8) og Lemma 3.12 følger:

(10) <X,Y>êQ(R;f([w])) <–> <A,B>êQ(J(R;f([w]))). Men i lys av (8) har vi:

(11) <A,B>êQ(R˚;[f([w])]) <–> <A,B>êQ(J(R;f([w])))

Fra (2), (3), og (4) følger:

(12) True(Pr(H1,H2),w,M) <–> <X,Y>êQ(R;f([w]))

Fra (6) og (11) følger:

(13) True(Pr(H1,H2),[w],M˚) <–> <A,B>êQ(J(R;f([w])))

Fra dette, (10) og (12) følger endelig det vi ønsker nemlig (+) ovenfor.

(v) Anta G = Ekv(H1,H2) for H1,H2êSub(F). Beviset i dette tilfelle blir helt analogt med beviset i det forrige tilfellet. Detaljene overlates til leseren.

Dette avslutter beviset for Lemma 4.9. **Q.E.D.**

Teorem 4.10 P0 har den endelige modellegenskapen. Dette vil si at dersom FêFm(L;A) og F er konsistent med hensyn på P0 finnes det en endelig modell M og wê(M);1 slik at True(F,w,M,L;A).

Bevis: Anta F er konsistent med hensyn på P0. Da vi at ¬Th(P0,¬F). Da kan {F} utvides til en maksimalt P0-konsistent mengde Δ. Vi betrakter så den kanoniske modellen konstruert med utgangspunkt i Δ og P;0. Dette er M;(Δ,P0). I følge Lemma 2.25 har man da, om man setter w0 = Δ at:

(1) True(F,w0, M;(Δ,P0), L;A).

La nå M' være en F-filtrasjon av M;(Δ;P0) med hensyn på en eller annen utvalgsfunksjon over [(M;(Δ,P0));1, ~(L;A, Sub(F), M;(Δ,P0))]. Det følger da fra (1) og Lemma 4.9 at det finnes en wê(M');1 slik at True(F,w,M',L;A). Men M' er endelig i lys av definisjonen av F-filtrasjon og Lemma 4.4. **Q.E.D.**

Teorem 4.11 P0 er avgjørbar.

Bevis: Anta FêFm(L;A). Vi benytter den følgende prosedyre for å avgjøre om Th(P0,F) holder eller ikke: Vi fastslår først antallet av subformler i F. Dette kan gjøres rent mekanisk. Anta dette er n. Vi fikserer så en mengde K med nøyaktig n elementer. Vi konstruerer så mengden J av alle P0-modeller M som oppfyller de følgende krav:

(i) (M);1 Inkl K

(ii) Er p en setningsbokstav i L;A som ikke forekommer i F har man at (M);3(p) = ø

Det skulle være klart at det bare finnes et endelig antall modeller i J og at vi effektivt kan enummerere dem i en sekvens s(0),....., s(k). Det er videre klart at vi for hver s(j) (0≤j≤k) kan avgjøre om F er gyldig i s(j) eller ikke i et endelig antall trinn. Etter at vi derfor har

konstruert sekvensen s(0),....,s(k) av modeller avgjør vi suksesivt om F er gyldig i S(j) for j=1,...,k. Er F gyldig i alle modellene konkluderer vi med at Th(P0,F). Er F ugyldig i en eller annen modell konkluserer vi med at ¬Th(P0,F). I begge tilfelle vil vi etter et endelig antall rent mekanisk utførbare operasjoner ha nådd frem til en avgjørelse.

At prosedyren alltid gir korrekte avgjørelser fremgår av det følgende: Har man Th(F,P0) er F gyldig i alle P0-modeller og derfor også gyldig i alle modellene i J. I dette tilfelle gir altså prosedyren et korrekt resultat. Har man på den annen side at ¬Th(P0,F) kan {¬F} utvides til en maksimalt konsistent teori w0 der
{¬F} Inkl w0. Vi betrakter så den kanoniske modellen konstruert med utgangspunkt i w0 og P;0. La oss betegne denne med "M;(w0,P0)". I følge Lemma 2.25 har man da at:

(1) True(¬F,w0, M;(Δ,P0), L;A).

La nå M' være en F-filtrasjon av M;(Δ;P0) med hensyn på en eller annen utvalgsfunksjon f over [(M;(Δ,P0));1, ~(L;A, Sub(F), M;(Δ,P0))]. Da vil (M');1 ha et kardinaltall som er mindre eller lik 2^n og er p en setningsvariabel som ikke forekommer i F vil man ha (M');3(p)=ø. Videre har vi at F er ugyldig i M'. Men fra dette følger det at det finnes en modell i J der F er ugyldig. Prosedyren som ble beskrevet gir derfor en korrekt avgjørelse også i dette tilfellet. **Q.E.D.**

Teorem 4.12 P1 og P2 er avgjørbare.

Bevis: P1 er deduktivt ekvivalent med P0 utvidet med AP1 som en definisjon av operatoren E i stedet for som et aksiom. Tilsvarende er P2 ekvivalent med P0 om man tenker seg P0 utvidet med AP1,AP2 og AP3 som definisjoner i stedet for som aksiomer. Siden P0 har en avgjørelsesprosedyre følger det at P1 og P2 også må ha det. **Q.E.D.**

Vi bemerker også det følgende resultat:

Teorem 4.13 P0Det, P1Det og P2Det er har alle en avgjørelsesprosedyre.

Beviset er helt analogt med det for P1,P2 og P3. Det eneste nye man behøver å kontrollere er at om M er en SDet modell (S=P0, P1,P2) så er F-filtrasjonen av M relativt til en utvalgsfunksjon over [(M);1, ~(L;A,Sub(F),M)], la oss kalle den M', også en SDet-modell. Dette innebærer at man må vise at i M' er det slik at alle preferanserelasjonene som er tilordnet de mulige verdenene i modellen er de samme. Man må med andre ord vise at:

(Aw1)(Aw2)(w1,w2ê(M');1 –> (M');2(w1) = (M');2(w2)). Men dette byr ikke på noen vanskeligheter når man vet at M har denne egenskapen. Vi overlater den detaljerte verifikasjon av dette til leseren.

Som et korollar til satsen ovenfor nevner vi:

Teorem 4.14 Systemene P0Det, P1Det og P2Det har alle den endelige modellegenskapen.

Med disse avgjørbarhetsresulatene har vi nådd det mål vi satte oss i dette kapitlet.

§5 Avsluttende bemerkninger.

Vi har her studert preferanserelasjoner og preferanseteoretiske systemer fra en temmelig generell og abstrakt synsvinkel. I det neste kapitlet vil vi anvende de generelle resultatene vi har presentert her på mer konkrete emner.

Selvom vi anser store deler av dette kapitlet som en systematisk fremstilling av en teori som i vesentlige henseende står for egen regning er det helt påkrevet å nevne at det vi har gjort står i dyp gjeld til en rekke arbeider av Bengt Hansson i preferanselogikk. De grunnleggende ideene bak f.eks. kalkylen P1 og aksiomet AP1 for operatoren E er i det vesentlige en direkte tilempning av ideer som han har fremlagt. La oss derfor komme med noen bemerkninger om den litterarturen som ligger til grunn for vårt arbeid.

Det første systematiske studiet av preferanselogikk synes å forekomme i Halldén [1]. Imidlertid studerer Halldén preferansekalkyler fra en hovedsakelig syntaktisk synsvinkel og utvikler ikke systematisk noen modellteori. I forbindelse med Avsnitt A kan det også nevnes at preferanserelasjoner kan studeres og settes i sammenheng med såkalte utvalgsstrukturer og aksiomer for dem. En detaljert analyse av forholdt mellom visse typer utvalgsstrukturer og preferanserelasjoner i vår forstand finnes i Hansson [1]. Som nevnt synes hovedideen bak den semantikken for operatoren E som ble presentert ovenfor å stamme fra Hansson og er klart fremstilt i Hansson [2]. Man finner den også fremstilt i Danielson [1]. Ideen benyttes også i sammenheng med imperativ-epistemisk logikk i Åquist [1]. Det bør nevnes at hverken Hansson eller Åquist betrakter språk hvor ubegrenset iterasjon av operatoren E er tillatt, og følgelig heller ikke betrakter nødvendigheten av å relativisere den underliggende preferanserelasjonen i modellene for språket til mulige verdener. Konstruksjoner av typen E dukker også opp i studiet av deontisk logikk. Forsøk på å bygge opp logikker for slike betingede deontiske operatorer foreligger i Rescher [1] og von Wright [1]. En detaljert diskusjon og kritikk av Reschers og von Wrights systemer fra en semantisk synsvinkel finnes i Hansson [2].

Teknikken i fullstendighetsbevisene som ble presentert ovenfor er en tilpasning til preferanselogikk av metoder om har blitt brukt i studiet av modallogikk. Det samme gjelder filtreringsmetoden vi har brukt i våre bevis for avgjørbarhet. En leser som er interessert i å se hvordan disse metodene kan brukes i forbindelse med rene modallogiske systemer kan henvises til Lemmon & Scott [1] og Segerberg [1].

Kapittel II

Kapittel II

§0 Innledning.

I dette kapitlet ønsker vi å gi en systematisk fremstilling av teoriene E, E;1 og E;2. Dette skjer i underavsnittene A – E. Teoriene er fullstendig formaliserte første-ordens teorier og kan oppfattes som et forsøk på å kodifisere tilsvarende intuitive teorier, omtrent på samme måte som ZF kan sies å være en tentativ systematisering av en viktig delmengde av sannheter om mengder. E;2 er den mest omfattende av teoriene og fremstilles delvis som en modifikasjon av E. Det samme gjelder E;1.

I Avsnitt A beskriver og definerer vi først språket til E, L;E. Dette er en utvidelse av L;A som ble definert detaljert i kapittel I av "Studier i semantikk og erkjen-nelsesteori. Del I". I dette avsnittet angir vi også de aksiomene om evidens og tid som inngår i teorien.

I Avsnitt B og Avsnitt C gir vi en fullstendig fremstilling av det man kan kalle den akseptanseteoretiske del, den epistemiske del og den prøvbarhetsteoretiske delen av teorien E. Dessuten gjør vi rede for hvordan de tilsvarende deler av teoriene E;1 og E;2 fremkommer ved passende revisjon av teorien E.

Avsnitt D inneholder en teori om bevis som inngår som en del av E;1 og E;2. Tilslutt formulerer vi i avsnitt E i dette kapitlet en generell teori om forklaring. Vi nevner at beskrivelsen og definisjonen av teorien E;2 først er fullstendig i Avsnitt E.

Avsnitt A

§1 Språket til teorien E.

Vi starter konstruksjonen av første-ordens teorien E ved å gi en definisjon av språket til den. I "Studier i semantikk og erkjennelsesteori. Del I" ga vi en streng definisjon av første-ordens språket L;A. L;E fremkommer nå ved å utvide det ikke-logiske vokabularet i L;A med alle predikatene på listen nedenfor. Som man ser er dette en betraktelig mengde.

I forbindelse med denne listen gjør vi oppmerksom på at uttrykkene til høyre er forkortelser for uttrykkene til venstre.

Primitive konstruksjoner i L;E

(1.1) "x er et utsagn som er evident i verdenen w" "Evid(x,w)"

(1.2) "x er et utsagn som er direkte evident i verdenen w" "DEvid(x,w)"

(1.3) "x er et utsagn som representerer alt som kan tas for gitt i verdenen w" "TEvid(x,w)"

(1.4) "x er et utsagn som er evident for y ved tidspunktet t i verdenen w" "Evid(x,y,t,w)"

(1.5)	"x er et utsagn som er evident for y ved tidspunktet t"	"Evid(x,y,t)"
(1.6)	"x er et utsagn som er direkte evident for y ved tids-punktet t i verdenen w"	"DEvid(x,y,t,w)"
(1.7)	"x representerer alt som kan anses for evident for y ved tidspunktet t i verdenen w"	"TEvid(x,y,t,w)"
(1.8)	"x representerer alt som kan tas for gitt ved tidspunktet t i verdenen w"	"TEvid(x,y,t)"
(1.9)	"x er et utsagn som y ved tidspunktet t er i stand til å kontrollere riktigheten av i verdenen w"	"Kntr(x,y,t,w)"
(1.10)	"x er et utsagn som y ved tidspunktet t i verdenen w verifiserer ved sanseiaktagelse"	"VS(x,y,t,w)"
(1.11)	"x er et utsagn som representerer noe y ser er tilfelle ved tidspunktet t i verdenen w"	"Ser(x,y,t,w)"
(1.12)	"x er et utsagn som representerer noe y hører er tilfelle ved tidspunktet t i verdenen w"	"Hør(x,y,t,w)"
(1.13)	"x er et utsagn som representerer noe y erindrer er tilfelle ved tidspunktet t i verdenen w"	"Er(x,y,t,w)"
(1.14)	"x er et utsagn som representerer noe y vet er tilfelle ved tidspunktet t i verdenen w"	"Vet(x,y,t,w)"
(1.15)	"x er et utsagn som representerer noe y tror er tilfelle ved tidspunktet t i verdenen w"	"Tror(x,y,t,w)"
(1,16)	"x er en teori som bør aksepteres gitt y i verdenen w"	"BørA(x,y,w)"
(1.17)	"x er et utsagn som bør aksepteres i verdenen w"	"Bør(x,w)"
(1.18)	"x er en verden som er enklere enn verdenen y sett relativt til verdenen w"	"Enk(x,y,w)"
(1.19)	"x er en verden som er nøyaktig like enkel som verdenen y sett relativt til verdenen w"	"LEnk(x,y,w)"
(1.20)	"x er et tidspunkt i verdenen w"	"Tp(x,w)"
(1.21)	"x er et tidspunkt som kommer før tidspunktet y i verdenen w"	"Før(x,y,w)"
(1.22)	"z er avstanden i minutter mellom tidspunktet x og tidspunktet y i verdenen w"	"Avst(z,x,y,w)"

Vi har nå gitt en fullstendig liste over de predikatene i L;E som kommer i tillegg til dem i L;A. La oss oppsummere med en formell definisjon:

Definisjon 1.1 L;E er det første-ordens språket som har som primitive ikke-logiske predikater alle predikatene i L;A samt predikatene (1.1) – (1.22) som er oppført på listen ovenfor.

§2 Noen nye semantiske antagelser.

Vi skal i det følgende – innenfor rammen av L;E – definere en klasse med semiformale språk. I denne forbindelse vil først et mer spesielt semiformalt språk, S;e, bli definert. Konstruksjonene i er angitt på listen nedenfor inngår i dette språket. Det kan nevnes at disse konstruksjonene bør oppfattes som konstruksjoner over mengden av uttrykk E;1. Klassen

E;1, som er en delmengde av alle bokstavsekvenser i Norsk, ble utførlig definert i kapittel I i "Studier i semantikk og erkjennelsesteori. Del I".

Listen er den følgende. Vi gjør oppmerksom på at de uttrykkene som er oppført til høyre er ment som forkortelser for de lengere uttrykkene som er oppført til venstre:

Konstruksjoner i det intensjonale språket S;e

(1)	"Det kan tas for gitt at F"	"Ev(F)"
(2)	"Det kan tas for direkte gitt at F"	"DEv(F)"
(3)	"Det at F er tilfelle representerer totaliteten av alt som kan tas for gitt"	"TEv(F)"
(4)	"Det er evident for x ved tidspunktet t at F"	"Evf(x,t,F)"
(5)	"Det er direkte evident for x ved tidspunktet t at F"	"DEvf(x,t, F)"
(6)	"Det at F representerer totaliteten av alt som er evident for x ved tidspunktet t"	"TEvf(x,t,F)"
(7)	"Det at F representerer totaliteten av alt som kan tas for gitt ved tidspunktet t"	"TEvt(t,F)"
(8)	"x er ved tidspunktet t i stand til å kontrollere hvorvidt det er slik at F"	"Kn(x,t,F)"
(9)	"x verifiserer ved sanseiaktagelse ved tidspunktet t at F er tilfelle"	"Vfs(x,t,F)"
(10)	"x ser ved tidspunktet t at F"	"Se(x,t,F)"
(11)	"x hører ved tidspunktet t at F"	"Hr(x,t,F)"
(12)	"x erindrer ved tidspunktet t at F"	"Er(x,t,F)"
(13)	"x vet ved tidspunktet t at F"	"Vet(x,t,F)"
(14)	"x tror ved tidspunktet t at F"	"Tror(x,t,F)"
(15)	"Det bør aksepteres at F"	"Ba(F)"
(16)	"Det at F er tilfelle bør aksepteres gitt at G representerer totaliteten av det som kan tas for gitt"	"BaG(F,G)"
(17)	"Man bør akseptere at F er tilfelle på grunnlag av alt som kan tas for gitt ved tidspunktet t	"BaT(t,F)"
(18)	"Man bør gi opp påstanden at F er tilfelle til fordel for påstanden at G er tilfelle gitt at H representerer totaliteten av alt som kan tas for gitt"	"PrG(F,G,H)"
(19)	"Man bør gi opp påstanden at F er tilfelle til fordel for påstanden at G er tilfelle"	"Pr;e(G,F)"
(20)	"Man bør gi opp påstanden at F er tilfelle til fordel for påstanden at G er tilfelle i lys av alt som kan tas for gitt ved tidspunktet t"	"PrT(G,F,t)"
(21)	"Man bør anse det at F er tilfelle og det at G er tilfelle som ekviakseptable påstander forutsatt at H representerer totaliteten av alt som kan tas for gitt"	"EkvG(F,G,H)"
(22)	"Man bør anse det at F er tilfelle og det at G er tilfelle som ekviakseptable påstander"	"Ekv;e(F,G)"
(23)	"Man bør anse det at F er tilfelle og det at G er tilfelle som ekviakseptable påstander i lys av alt det som kan tas for gitt ved tidspunktet t"	"EkvT(F,G,t)"

(24) "De enkleste verdenene der det er tilfelle at F er enklere enn de enkleste verdenene der det er tilfelle at G" "Simp(F,G)"
(25) "De enkleste verdenene der det er tilfelle at F er nøyaktig like enkle som de enkleste verdenene der det er tilfelle at G" "SimpE(F,G)"
(26) "x er et tidspunkt" "T(x)"
(27) "Tidspunktet x kommer før tidspunktet y" "Før(x,y)"
(28) "x er en person" "P(x)"
(29) "x vet implisitt ved tidspunktet t at F er tilfelle" "VetI(x,t,F)"
(30) "x tror implisitt ved tidspunktet t at F er tilfelle" "TrorI(x,t,F)"

Dermed har vi gitt en fullstendig oversikt over de konstruksjonene som inngår i S;e.

Når det gjelder konstruksjonene på listen ovenfor skulle det være nokså klart av hvilken type de er. PrG er f.eks. en konstruksjon av type <0,0,3>, BaT en konstruksjon ab type <0,1,1> osv. Siden konstruksjonene er E;1-konstruksjoner kan de enkelte linjene på listen oppfattes som definisjoner av de symbolene som står til høyre. Disse er da formelt sett å regne som funksjonssymboler. Man har i så fall at Ev(F)êE;1 om FêE;1 og helt tilsvarende for de andre konstruksjonene.

I "Studier i erkjennelsesteori og semantikk. Del I", kapittel I, definerte vi konstruksjonene A., A, E., E, ¬,&, v, –>, <–>, Nec, Pos, =, Eks, og i over E;1.[5] La oss kalle konstruksjonene (1) – (30) for X1,....,X;30. Vi kan da definere:

Definisjon 2.1 (a) C;e er det minste konstruksjonssystemet over E;1 som inneholder konstruksjonene X;1,...,X;30 samt konstruksjonene:

A., A, E., E, ¬,&, v, –>, <–>, Nec, Pos, =, Eks, og i .

(b). Er C;e definert som ovenfor setter vi:

L;e = L[(C;e);1,(C;e);2, E;1,Var;0]

(c) S;e = <L;e,n;0>

Man kunne naturligvis ha formalisert denne definisjonen av C;e fullstendig. Imidlertid ville en helt eksplisitt definisjon ha blitt svært lang og uoversiktlig.

L;e er naturligvis – slik det fremgår av definisjonen en intensjonal språkstruktur. Vi betrakter nå det følgende aksiom:

Sm27 SEMI;u(<L;e,n;0>) & <L;e,n;0>êUtvid(L;0)

Aksiomet sier at <L;e,n;0> er et semiformalt intensjonalt språk som er en utvidelse av L;0.[6]. Det bør bemerkes at L;0 og n;0 ble definert i kapittel I i "Studier i semantikk og erkjennelsesteori. Del I". Videre kan det bemerkes at dersom Sm27 skrives i primitiv notasjon får man en formel i L;A. Sm27 kan legges til alle teoriene T;A – T;D*, men ved hver enkelt teori er det da forutsatt at man bruker de relevante definisjonene.

I det følgende er det også hensiktsmessig å ha til rådighet den følgende definisjon:

Definisjon 2.2 Ep(S;e) er mengden av alle de språk L som oppfyller de følgende krav:

5 Se SSE-I Kapittel I, Definisjon 0.15.

6 Når det gjelder definisjonen av L;0 kan man studere Definisjon 0.29 i kapittel I i SSE-I.

(i) SEMI;u(L)
(ii) Repfrag((L);1,n;0)
(iii) L = <(L);1,n;0>
(iv) Var(L) = Var(S;e)
(v) (Am)(An)(Ak)(m,n,kêN –> P;<mn,k>((S;e);1) Inkl P;<mn,k>((L);1)
(vi) (Am)(An)(Ak)(m,n,kêN –> C;<mn,k>((S;e);1) Inkl C;<mn,k>((L);1)
(vii) (Ax)(xê(P;<m,n,k>((S;e);1 U C;<m,n,k>((S;e);1 –>
Me(x,S;e) = Me(x,L))

Fra denne definisjonen fremgår det at LêEp(S;e) hvis og bare hvis L er et semiformalt utvetydig språk der (L);1 representerer en formalisert versjon av et fragment av norsk, som videre inneholder alle konstruksjonene i S;e og der de konstruksjonene som er felles for L og S;e har den samme betydning i de to språkene.

S;e er naturlig nok avgrenset på en vilkårlig måte i visse henseende. Selvom naturligvis svært meget kan uttrykkes i S;e vil det være en uendelig mengde med påstander som man kan tenkes å støte på som ikke kan uttrykkes i dette språket. Imidlertid virker det rimelig å tro at endel av disse kan uttrykkes i forskjellige L der LêEp(S;e).

Som et eksempel på et svært rikt språk i Ep(S;e) betrakter vi det følgende. La X være klassen av alle de predikatkonstruksjonene som inngår i L;E. Blandt disse er predikatkonstruksjonene (1.1) – (1.22) i §1. Det er klart at alle disse kan defineres helt rigorøst som E;1-konstruksjoner. La Y være klassen av konstruksjoner i S;e. Vi kan nå betrakte det konstruksjonssystemet som inneholder konstruksjonene i XUY og som er det minste systemet som inneholder dem. Vi kan kalle dette for C+. Leseren kan selv, om det er ønskelig, konstruere en presis definisjon av C+. Vi kan så definere L;e+ ved:

L;e+ = L[(C+);1, (C+);2, E;1,Var;0)

L;e+ er da L;e utvidet med alle predikatkonstruksjonene i L;E. Det følger ikke fra dette eller noen andre påstander vi har betraktet at <L;e+,n;0> er et semiformalt utvetydig språk. Men dersom det virker rimelig kan man postulere at det er tilfelle og føye det til som et nytt ikke-logisk aksiom. Med andre ord kan man ta i betraktning:

Sm28 <L;e+,n;0>êEp(S;e).

Det har neppe noen hensikt å ta med Sm28 offisielt som et eget aksiom i teorien E. Derimot er vi interessert i denne formelen som en hypotese som det kan være av interesse å undersøke konsekvensene til relativt til E. Poenget er at L;E utgjør en passende ramme innenfor hvilken man kan diskutere og uttrykke mer eller mindre interessante påstander om språkene i Ep(S;e). Blandt disse hører da også L;e+.

Så langt har vi bare beskrevet språket L;E. For å gjøre beskrivelsen av teorien E fullstendig er det nødvendig å spesifisere hvilke ikke-logiske aksiomer som inngår i den. De logiske og mengdeteoretiske aksiomene har vi allerede spesifisert i Del I. La oss nå begynne den detaljerte gjennomgang av de formler i L;E som inngår i teorien.

§3 Evidensteoretiske aksiomer.

Vi vil først betrakte en mengde med formler i L;E som vil bli omtalt som de evidensteoretiske aksiomene i teorien E. Dette er formlene EpA1 – EpA17 nedenfor. Når det gjelder de fleste av disse formlene virker de forholdsvis rimelige intuitivt sett på meg. Men jeg vil da med en

gang legge til at jeg forventer at andres intuisjoner kan gå i en helt annen retning. Det bør derfor kraftig understrekes at disse aksiomene er av en tentativ natur.

Vi starter med:

EpA1 (Aw)(wêI –> (E!X)(Xê(2^I & TEvid(x,w)))

Det denne setningen sier er at det finnes et og bare et utsagn X som representerer totaliteten av alt som kan tas for gitt i verdenen w for alle mulige verdener w. Det forkommer meg som om denne setningen muligens kan anses for rimelig om man anser at predikatet "TEvid" som meningsfullt.

Det følgende aksiom sier enn mer at det utsagnet som representerer totaliteten av alt som kan tas for gitt er konsistent:

EpA2 (Aw)(wêI –> (Ew1)(w1êI & (Ax)(TEvid(x) –> x(w;1) =1)))

EpA2 kan oppfattes som en forholdsvis svak antagelse og det virker merkelig om man skulle benekte denne om man aksepterer EpA1.

La oss definere:

Definisjon 3.1e;T(w) = (ix)(xê2^I & TEvid(x,w))

Som det fremgår av denne definisjonen kan "e;T(w)" leses "det utsagnet som representerer totaliteten av alt det som kan tas for gitt i verdene w". Brukes denne definisjonen kan EpA1 reformuleres slik (Aw)(wêI –> (Ey)(y=e;T(w))).

Det neste formelen som vil bli inkludert blandt aksiomene i E sier at utsagnet e;T(w) impliserer alle de utsagn som er evidente i verdenen w. Formelt kan dette uttrykkes slik:

EpA3 wêI & Evid(x,w). –> (Ay)(yêI –> (e;T(w)‘y =1 –> x(y) =1))

Noen kommentarer her: Er x og y to utsagn, dvs. elementer i 2^I sier vi at x impliserer y om y er sann i alle de verdener hvor x er sann. Nå er et utsagn sant i verdenen w hvis og bare hvis x(w)=1. Det er usant i verdenen w om x(w)=0. Påstanden om at x impliserer y kan derfor utrykkes ved:

(Aw)(wêI –> (x(w)=1 –>y(w)=1))

EpA3 virker rimelig og vi har ikke funnet noen argumenter som skulle tilsi at det er feilaktig. Dette gjelder også den følgende påstand som virker temmelig opplagt om man aksepterer meningsfullheten av de predikatene som har med evidens å gjøre på listen som ble presentert i §1:

EpA4 wêI & DEvid(x,w). –> Evid(x,w)

EpA4 uttrykker at ethvert utsagn som er direkte evident i verdenen w også er evident i verdenen w.

Den samme, nokså trivielle karakter, har den følgende formel:

EpA5 (i) TEvid(x,w) –> (xê(2^I) & wêI)
(ii) (DEvid(x,w) v Evid(x,w) v DEvid(x,y,t,w) v

Evid(x,y,t,w) v Evid(x,y,t)) –> (xê2^I & yêD & wêI & Tp(x,w))

Dette aksiomet skulle være temmelig opplagt. Det nevnes bare her fordi vi ønsker å være helt fullstendige og eksplisitte ved fremstillingen av teorien. Strengt tatt følger ikke EpA5 fra EpA1 – EpA4; det bør derfor tas med. (i) uttrykker at dersom x er et utsagn som representerer totaliteten av alt som kan tas for gitt i verdenen w så må x være et utsagn og w en logisk mulig verden. Tilsvarende impliserer (ii) at dersom f.eks. x er et utsagn som er evident for y ved tidspunktet t i verdenen w så må y være et utsagn, ie. yê2^I, w en mulig verden, t et tidspunkt i verdenen w og y et mulig individ. Tilsvarende gjelder for de andre disjunktene i antesedenten i (ii).

Også den følgende setning er av en helt opplagt natur:

EpA6 (i) wêI & Evid(x,y,t,w). –> Evid(x,w)
(ii) wêI & DEvid(x,y,t,w). –> Evid(x,y,t,w)
(iii) Evid(x,y,t) <–> Evid(x,y,t,a;0)

Merk her at a;0 er den aktuelle verden. Uttrykket "a;0" ble definert i kapittel I i Del I.

Vi definerer en snitt-operasjon, SNu, og en union-operasjon, UNu, over klassen av utsagn på følgende måte:

Definisjon 3.2 Anta X Inkl 2^I. Da setter vi:
(i) SNu(X) = (iY)(Yê2^I & (Aw)(wêI –> (Y(w)=1 <–> (Az)(zêX –> z(w)=1))))[7]
(ii) UNu(X) = (iY)(Yê2^I & (Aw)(wêI –> (Y(w)=1 <–> (Ez)(zêX & z(w)=1))))

Vi har tidligere definert operasjonen c(X,Y) som er den karakteristiske funksjonen til mengden X med hensyn på mengden Y. Er X og Y mengder er c(X,Y) den funksjonen som tilordner alle elementer i Y som er med i X tallet 1 og som tilordner alle de som er med i Y–X tallet 0. Man ser altså at dersom X og Y er mengder, der X Inkl Y, vil c(X,Y)ê(2^Y). Operasjonen c;-1(X,Y) er om-vendingen til Y. Er X et element i 2^Y så er c;-1(X,Y) mengden av alle de objekter z i Y hvor man har X(z)=1. Er derfor X og Y to mengder der X Inkl Y må man ha at c;-1(c(X,Y),Y) = X. [8]. Gitt disse definisjonene ser man nokså raskt at det følgende holder:

(i) SNu(X) = c(SN(Mg(c;-1(x,I): xêX)),I) og at
(ii) UNu(X) = c(UN(Mg(c;-1(x,I): xêX)),I)

Vi kan nå formulere de følgende aksiomer som er analoge med EpA1 – EpA3:

EpA7 wêI & yêD & Tp(x,w). –>
(Az)(TEvid(z,y,t,w) <–> z= SNu(Mg(x: Evid(x,y,t,w))))

Dette aksiomet uttrykker at x representerer alt som kan anses som evident ved tidspunktet t i verdenen w for y hvis og bare hvis x er snittet av alle de utsagn som er evidente for y ved tidspunktet t i verdenen w. Det virker ikke som om det er noe urimelig ved denne påstanden.

---

7 Man bør legge merke til at SNu(X)= (iY)(Yê(2^I) &(Aw)(wêI –> Y(w)=1)) om X er den tomme mengden. Man har altså at c;-1(SNu(X),I)=I om X=ø.
8 Se Del I, Kapittel VII, §1.3.

Snarere synes den å være en sannhet som er sann i kraft av betydningen til frasen "representerer alt som kan tas for gitt".

EpA8 wêI & Tp(x,w). –>
(Az)(TEvid(z,t,w) <–>
z= SNu(UN(Mg(Mg(x: TEvid(x,y,t,w)): yêD)

EpA8 er i visse henseende analog med EpA7 og uttrykker at dersom z represen-terer alt som kan tas for gitt ved tidspunktet t så er z snittet av alle de utsagn x der man har at TEvid(x,y,t,w) for et eller annet yêD. Også EpA8 virker rimelig.

Den følgende formulering har visse likhetspunkter med EpA2:

EpA9 wêI & Tp(x,w) & TEvid(z,t,w) v TEvid(z,y,t,w) –> (Ew')(w'êI & z(w') =1)

Formuleringen sier at dersom z er det utsagnet som representerer totaliteten av alt som kan tas for gitt ved tidspunktet t i verdenen w, eller er det utsagnet som representerer totaliteten av alt det som kan tas for gitt for y ved tidspunktet t i verdenen w så er z et utsagn som er sant i minst en eller annen logisk mulig verden. z er med andre ord konsistent.

La oss bemerke at EpA9 ikke er uavhengig av EpA1 – EpA8, men kan utledes fra disse.

Vi betrakter så:

EpA10 VS(x,y,t,w) v Se(x,y,t,w) v Hør(x,y,t,w) v Er(x,y,t,w). –>
Evid(x,y,t,w).

Dette aksiomet sier at dersom x er et utsagn som representerer noe y ved tidspunktet t i verdenen w enten verifiserer at er tilfelle ved sanseiaktagelse, eller ser, hører eller erindrer at er tilfelle, så er x et utsagn som er evident for y ved tidspunktet t i verdenen w. x representerer da noe y ved dette tidspunkt kan ta for gitt i verdenen w. Vi vil senere kommentere denne setningen mer utførlig. Umiddelbart fortoner den seg i mine øyne meget plausibel. Den synes heller ikke å ha noen direkte absurde konsekvenser i nærvær av de andre aksiomene vi har nevnt eller innenfor rammen av E som helhet.

Det følgende er et semantisk aksiom som fikserer betydningen til endel av konstruksjonene i S;e.

EpA11 LêEp(S;e) & Xê(2^I) & wêI & y,zêD –>
(i) Me(Ev,L)(X)‘w =1 <–> Evid(X,w)
(ii) Me(DEv,L)(X)‘w =1 <–> DEvid(X,w)
(iii) Me(TEv,L)(X)‘w =1 <–> TEvid(X,w)
(iv) Me(Evf,L)(y,z,X)‘w =1 <–> Evid(X,y,z,w)
(v) Me(DEvf,L)(y,z,X)‘w =1 <–> DEvid(X,y,z,w)
(vi) Me(TEvf,L)(y,zX)‘w =1 <–> TEvid(X,y,z,w)
(vii) Me(TEvt,L)(y,X)‘w =1 <–> TEvidX,y,w)

Ved litt ettertanke skulle det ikke være vanskelig å se ideén bak dette aksiomet og også at det har en høy grad av plausibilitet.

Setningen nedenfor er av samme natur som EpA11 og skulle neppe kreve svært utførlige kommentarer:

EpA12 LêEp(S;e) & Xê(2^I) & wêI & y,zêD –>
(i) Me(Kn,L)(y,z,X)‘w =1 <–> Kntr(X,y,z,w)
(ii) Me(Vfs,L)(y,z,X)‘w =1 <–> VS(X,y,z,w)
(iii) Me(Se,L)(y,z,X)‘w =1 <–> Ser(X,y,z,w)
(iv) Me(Hr,L)(y,z,X)‘w =1 <–> Hør(X,y,z,w)
(v) Me(Er,L)(y,z,X)‘w =1 <–> Er(X,y,z,w)

Vi skal også ta i betraktning den følgende formel:

EpA13 wêI –> DTeori(Mg(x: Evid(x,w)))

Denne setningen uttrykker at klassen av alle de utsagn som er evidente i verdenen w er en deduktivt lukket teori. Dette innebærer at dersom Z er en klasse med utsagn som er evidente i verdenen w og y er et utsagn som er en logisk konsekvens av utsagnene i X så er også y et utsagn som er evident i verdenen w. Denne påstanden er kanskje ikke fullt så opplagt. Men det virker ikke urimelig utfra den tolkningen av "evident" som vi her har i tankene. Uttrykket "evident" slik vi her bruker det kan oversettes med slike uttrykk som "i prinsippet meningsløst å betvile", "teoretisk sett meningsløst å betvile". Er X en samling av utsagn som det teoretisk sett er meningsløst å betvile synes det ikke urimelig å si at alle logiske konsekvenser av utsagnene i X er teoretisk sett meningsløse å betvile.

Det neste ikke-logiske aksiomet i E er dette:

EpA14 VS(x,y,t,w) v Ser(x,y,t,w) v Hør(x,y,t,w) v Er(x,y,t,w). –> x(w)=1

Er x et utsagn som representerer noe y ved tidspunktet t i verdenen w enten verifiserer ved sanseiaktagelse, ser er tilfelle, hører er tilfelle eller erindrer er tilfelle, så er x et sant utsagn i verdenen w. Man kan altså ikke verifisere ved sanseiaktagelse, se, høre eller erindre noe som ikke er tilfelle.

La oss nå betrakte den følgende setning:

(+) (Ser(x,y,t,w) v Hør(x,y,t,w)) –> VS(x,y,t,w)

Setningen uttrykker at om x er et utsagn som representerer noe y ser eller hører er tilfelle ved tidspunktet t i verdenen w så er x et utsagn som y verifiserer ved sanseiaktagelse ved dette tidspunktet i denne verdenen. Det forkommer meg som om (+) er noe for sterk. Den utelukker at det kan finnes utsagn som representerer noe man kan se er tilfelle, men hvor man ikke verifiserer dette på basis av sanseiaktagelse. Hvis f.eks. vesensinnsikter er utsagn av denne type utelukker (+) eksistensen av vesensinnsikter. Det synes ikke å være noen grunn til apriori å gjøre dette. Følgelig kan en svekket versjon av (+) være mer berettiget i det man innskrenker seg til kontingente utsagn i (+):

EpA15 xê(2^I) & (Ew1)(Ew2)(w1,w2êI & x(w1)=1 & x(w2)=0) –>
(((Ser(x,y,t,w) v Hør(x,y,t,w)) –> VS(x,y,t,w)).

EpA15 uttrykker at dersom man ser eller hører at noe er tilfelle og dette er et kontingent forhold så verifiserer man alltid dette forhold ved sanseiaktagelse.

Det er nærliggende å tenke seg at det utsagn som representerer totaliteten av alt som kan tas for gitt i verdenen w er snittet av alle de utsagn som er evidente i verdenen w:

EpA16 e;T(w) = SNu(Mg(x: Evid(x,w)))

Det er vanskelig å se noe kunstig eller unaturlig i denne antagelsen.

Helt tilslutt skal vi se på en antagelse som vil bli mer utførlig diskutert i forbindelse med introduksjonen av de akseptanseteoretiske aksiomene i E. Først definerer vi:

Definisjon 3.3(i) e;T(w,t) = (ix)(xê(2^I) & TEvid(x,t,w))

(ii) R;w = Mg(<x,y>: Enk(x,y,w) v LEnk(x,y,w))

e;T(w,t) er følgelig det utsagnet som representerer alt som kan tas for gitt ved tidspunktet t i verdenen w og R;w er relasjonen som består mellom to verdener x og y hvis og bare hvis x enten er like enkel eller enklere enn y relativt til verdenen w. Det aksiomet vi har i tankene kan nå formuleres konsist på følgende måte:

EpA17 Tp(t,w) & wêI & c;-1(e;T(w,t),I)≠ø & c;-1(e;T(w),I)≠ø. –>
Max(R;w, c;-1(e;T(w,t),I))≠ø & Max(R;w, c;-1(e;T(w),I))≠ø

Som nevnt vil vi diskutere denne antagelsen mer utførlig i Avsnitt B.

La oss nå oppsummere. Vi har så langt angitt de evidensteoretiske aksiomene som inngår i teorien E. Dette er kort sagt setningene EpA1 – EpA17.
Vi kan derfor definere rigorøst et fragment av teorien E på følgende måte:

Definisjon 3.4 T;A+ Konj/i,1,17/(EpAi) er den første-ordens teorien som er entydig bestemt på følgende måte:

(i) Språket til teorien er L;E.
(ii) Aksiomene i teorien er:
  (a) Alle aksiomene i T;A
  (b) Sm27, samt EpA1 – EpA17.
  (c) Alle nye instanser av substitusjons- og replacement aksiomskjemaet i L;E
(iii) Slutningsreglene i teorien er modus ponens og universell generalisering.

§4 Ultraintensjonale modifikasjoner av EpA1 – EpA17.

Vi har i Del I av denne avhandlingen diskutert det som vi der kalte det ultraintensjonale hierarki og forskjellen mellom intensjonale og ultraintensjonale objekter. I T;A kan vi bare uttrykke påstander om intensjonale objekter og ikke om korresponderende ultraintensjonale objekter. I T;A* og L;A* kan man derimot uttrykke påstander om begge arter av ting.

Nå er det slik at aksiomene EpA1 – EpA17 uten videre kan legges til T;A*. De er hovedsakelig tenkt som et tillegg til T;A. Imidlertid vil vi her spesifisere visse modifikasjoner av aksiomene som passer sammen med teorien T;A*.

Definisjon 4.1L;E* er det første-ordens språket som fremkommer når man legger til predikatene (1.1) – (1.22) til predikatene i L;A* som nye ikke-logiske predikater.

Forskjellen mellom L;E og L;E* er at L;E* inneholder predikatet "W(x)" - "x er en verden", mens L;E ikke gjør dette. W er klassen av alle verdener og ifølge T;A* har man selvfølgelig at I Inkl W. Dette innebærer at alle logisk mulige verdener er verdener. Men det omvendte behøver ikke å være tilfelle. Det kan finnes elementer i W som ikke er med i I. Det kan med andre ord finnes verdener som ikke er logisk mulige verdener.

Vi angir nå en sekvens av aksiomer EpUA1 – EpUA17 som fremkommer ved visse forandringer i EpA1 – EpA17. Forandringene er de følgende:

EpA1 må forandres til:

EpUA1 wêI –>. (AX)(AY)(TEvid(X,w) &TEvid(Y,w). –>
Rest(X,I)=Rest(Y,I)) & (EX)(TEvid(X,w))

Man må altså forandre EpA1 slik at vi nå arbeider med ultrautsagn, ie. elementer i (2^W), i stedet for utsagn. Totaliteten av alt som er evident i verdenen w er nå ikke representert ved et utsagn, men ved en klasse av ultrautsagn som alle samsvarer når man begrenser dem til I i det to ultrautsagn x,yê(2^W) samsvarer i alle logisk mulige verdener hvis og bare hvis Rest(x,I) = Rest(y,I). Merk at det ikke er nødvendig å anta at det bare finnes et Xê(2^W) slik at TEvid(X,w).

Når det gjelder EpA2 endrer vi dette til:

EpUA2 wêI &TEvid(X,w). –> (Ew')(w'êI & X(w')=1)

Denne forandringen skulle kreve færre kommentarer. EpA3 må også forandres. Vi foreslår i stedet:

EpUA3 wêI & TEvid(X,w) & TEvid(Y,w) –>
(Ay)(yêI –> (X(w) =1 <–> Y(w)=1))

Vi bemerker at EpA4 og EpA6 kan overtas uforandret. Man har altså at

EpUA4 wêI & DEvid(x,w). –> Evid(x,w)

og

EpUA6 (i) wêI & Evid(x,y,t,w). –> Evid(x,w)
(ii) wêI & DEvid(x,y,t,w). –> Evid(x,y,t,w)
(iii) Evid(x,y,t) <–> Evid(x,y,t,a;0)

Derimot må EpA5 forandres til:

EpUA5 (i) TEvid(x,w) –> (xê(2^W) & wêW)
(ii) (DEvid(x,w) v Evid(x,w) v DEvid(x,y,t,w) v
Evid(x,y,t,w) v Evid(x,y,t)) –> (xê2^W & yêD & wêW & Tp(x,w))

Vi vil fremdeles bruke notasjonen "SNu(X)" uten forandringer i Definisjon 3.2. Man noterer i denne forbindelse at dersom Xê(2^W) så har man at Rest(X,I)ê(2^I). Imidlertid må EpA7 forandres. Vi foreslår:

EpUA7 wêI & yêD & Tp(x,w). –> (Az)(TEvid(z,y,t,w) <–>
Rest(z,I) = SNu(Mg(Rest(x,I): Evid(x,y,t,w))))

EpA8 må endres på tilsvarende vis til:

EpUA8 wêI & Tp(x,w). –> (Az)(TEvid(z,t,w) <–>
Rest(z,I)= SNu(UN(Mg(Mg(Rest(x,I): TEvid(x,y,t,w)): yêD)

Det er unødvendig å foreta noen forandringer i EpA9 og EpA10. De får derfor det samme utseende som før:

EpUA9 wêI & Tp(x,w) & TEvid(z,t,w) v TEvid(z,y,t,w) –>
(Ew')(w'êI & z(w') =1)

og:

EpUA10 VS(x,y,t,w) v Se(x,y,t,w) v Hør(x,y,t,w) v Er(x,y,t,w). –>
Evid(x,y,t,w).

Derimot trengs noen mindre justeringer i EpA11 og Ep A12. Disse endres til:

EpUA11 LêEp(S;e) & Xê(2^W) & wêI & y,zêD –>
(i) Me(Ev,L)(X)‘w =1 <–> Evid(X,w)
(ii) Me(DEv,L)(X)‘w =1 <–> DEvid(X,w)
(iii) Me(TEv,L)(X)‘w =1 <–> TEvid(X,w)
(iv) Me(Evf,L)(y,z,X)‘w =1 <–> Evid(X,y,z,w)
(v) Me(DEvf,L)(y,z,X)‘w =1 <–> DEvid(X,y,z,w)
(vi) Me(TEvf,L)(y,zX)‘w =1 <–> TEvid(X,y,z,w)
(vii) Me(TEvt,L)(y,X)‘w =1 <–> TEvidX,y,w)

Den eneste forandringen her er at vi har erstattet "2^I" i EpA11 med "2^W". Det samme gjelder EpA12. Den nye versjonen blir:

EpUA12 LêEp(S;e) & Xê(2^W) & wêI & y,zêD –>
(i) Me(Kn,L)(y,z,X)‘w =1 <–> Kntr(X,y,z,w)
(ii) Me(Vfs,L)(y,z,X)‘w =1 <–> VS(X,y,z,w)
(iii) Me(Se,L)(y,z,X)‘w =1 <–> Ser(X,y,z,w)
(iv) Me(Hr,L)(y,z,X)‘w =1 <–> Hør(X,y,z,w)
(v) Me(Er,L)(y,z,X)‘w =1 <–> Er(X,y,z,w)

Når det gjelder EpA13 endres den til:

EpUA13 wêI –> DTeori(Mg(Rest(x,I): Evid(x,w)))

EpA14 og EpA15 endres til henholdsvis:

EpUA14 VS(x,y,t,w) v Ser(x,y,t,w) v Hør(x,y,t,w) v Er(x,y,t,w)& wêI. –> x(w)=1

EpUA15 wêI &xê(2^W) & (Ew1)(Ew2)(w1,w2êI & x(w1)=1 &
x(w2)=0) –>(((Ser(x,y,t,w) v Hør(x,y,t,w)) –> VS(x,y,t,w)).

EpA16 må endres til:

EpUA16 wêI & TEvid(X,w). –> Rest(X,I) = SNu(Mg(Rest(X,I): Evid(X,w)))

Når det endelig gjelder det siste aksiomet EpA17 kan dette nå formuleres slik:

EpUA17 Tp(t,w) & wêI &TEvid(Y,w) & TEvid(Y,x,t) –>
Max(R;w, c;-1(Rest(X,I),I))≠ø & Max(R;w, c;-1(Rest(Y,I),I))≠ø

Dermed har vi faktisk gitt en rigorøs beskrivelse av aksiomene EpU1 – EpU17 i L;E*. La oss oppsummere med den følgende definisjon som er helt analog med Definisjon 3.4 i §3.

Definisjon 4.1T;A*+ Konj/i,1,17/(EpUAi) er den første-ordens teorien som er entydig bestemt på følgende måte:

(i) Språket til teorien er L;E*.
(ii) Aksiomene i teorien er:
  (a) Alle aksiomene i T;A*
  (b) Sm27 samt EpU1 – EpU17.
  (c) Alle nye instanser av substitusjons- og replacement aksiomskjemaet i L;E*
(iii) Slutningsreglene i teorien er modus ponens og universell generalisering.

Det er klart at T;A*+ Konj/i,1,17/(EpUAi) er helt analog med teorien T;A+ Konj/i,1,17/ (EpAi). Faktisk kan man utlede alle teoremene i den sistnevnte om man legger til som et aksiom: I =W. Vi nevner tilslutt at E;2 er en utvidelse av T;A*+ Konj/i,1,17/(EpUAi).

§5 Tidsteoretiske aksiomer.

I L;E inngår visse predikater som kan brukes til å uttrykke forhold om tid. Det dreier seg om predikatene (1.20) –(1.22) på listen i §1. Tid er i seg selv et meget interessant emne fra en filosofisk synsvinkel og kunne naturligvis gis en ut-førlig behandling. De tidsteoretiske aksiomene som presenteres nedenfor kunne derfor ha blitt langt mer omhyggelig diskutert enn det gjøres her. Men vi skal ikke gjøre det her.

De aksiomene som presenteres er av en nokså "naiv" natur og temmelig sterke. De er naturlig nok valgt ut blandt mange andre mulige aksiomsett. Når vi har stanset opp ved disse er det av to grunner. For det første fordi vi ønsker å fiksere vår oppfatning av tid slik at leseren i det følgende hele tiden kan ha en klar oppfatning av hva vi forutsetter om dette. For det andre fordi aksiomene er forholdsvis enkle. Noe grovt formulert kunne man si at vi tenker

oss at klassen av tidspunkter utgjør et kontinuum, videre at tiden er ordnet lineært og at vi kunn har en tid i alle mulige verdener. Dette siste innebærer at dersom noe er et tidspunkt i en mulig verden er det også et tidspunkt i alle mulige andre verdener, og kommer et tidspunkt før et annet i en verden må dette tidspunktet komme etter det andre i alle mulige andre verdener. De følgende formuleringer uttrykker delvis dette:

(5.1) (Ax)(xêD –> (Aw)(wêI –> Tp(x,w)) v (Aw)(wêI –> ¬Tp(x,w)))
(5.2) (Ax)(Ay)(x,yêD –>
(Aw)(wêI –> Før(x,y,w)) v (Aw)(wêI –> ¬Før(x,y,w)))
(5.3) (Ax)(Ay)(x,yêD –>
(Aw)(wêI –> Avst(z,x,y,w)) v (Aw)(wêI –> ¬Avst(z,x,y,w)))
(5.4) Før(x,y,w) –> Tp(x,w) & Tp(y,w) & wêI
(5.5) Tp(x,w) –>(xêD & wêI)

Som man ser innebærer setningene (5.1) – (5.5) at alle funksjonene:
∂xêD(c(Mg(w: Tp(x,w)),I)
∂x,yêD(c(Mg(w: Før(x,y,w)),I)
∂xêD(c(Mg(w: Avst(z,x,y,w)),I)
er det man kunne kalle konstante attributter eller "rigide" attributter.

I det følgende lar vi "Reell" betegne klassen av de reelle tall. Reell tenkes definert innenfor rammen av ZFC på vanlig måte. Videre betegner "<" den vanlige "mindre-enn"-relasjonen mellom reelle tall. Også denne tenkes definert på passende måte i rent mengdeteoretiske termer. Vi lar + stå for vanlig addisjon over Reell. Det er klart vi ved denne og andre aritmetiske operasjoner tenker oss at vi har til rådighet helt vanlige, rent mengdeteoretiske definisjoner.

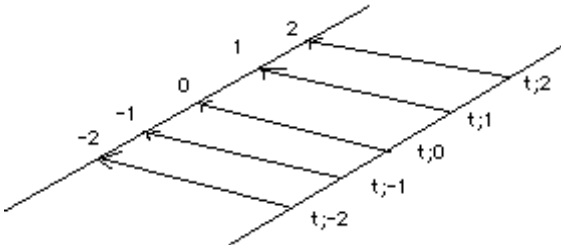
Vi betrakter så de følgende setninger i L;E:

(5.6) Avst(x,x,y,w) –> wêI & Tp(x,w) & Tp(y,w) & zêReell
(5.7) Reell Inkl D
(5.8) Avst(z,x,y,w) & Før(x,y,w) –> z>0
(5.9) Før(x,y,w) & Før(y,z,w) & Avst(r1,x,y,w) & Avst(r2,y,z,w) –>
Avst(r1+r2,x,z,w)
(5.10) Avst(z,x,y,w) –> Avst(z,y,x,w)
(5.11) wêI & Tp(x,w) –> Avst(0,x,x,w)
(5.12) wêI & Tp(x,w) & Tp(y,w) –> (E!z)(Avst(z,x,y,w))

La oss definere:

Definisjon 5.1(i) Før = Mg(<x,y>: Før(x,y,a;0)
(ii) Tp = Mg(x: Tp(x,a;0)

FIGUR



Merk at "a;0" i denne definisjonen betegner den aktuelle verden. I teorien E går man ut fra at strukturen <Tp, Før> er isomorf med <Reell,< >. Med andre ord:

(5.13) (Ef)(Cor(f) & Dom(f) = Tp & Rgn(f) = Reell &
(Ax)(Ay)(x,yêTp –> (<x,y>êFør <–> f(x)< f(y)))

Konjunksjonen av de universelle lukningene av formlene (5.1) – (5.13) vil vi kalle EpE1. Man må oppfatte dette som ett komplisert ikke-logisk aksiom i E.

I setningene (5.1) – (5.13) forekommer det ingen referanser til språket S;e eller noe språk i klassen Ep(S;e). Vi vil også inkludere det følgende semantiske aksiom i E som fikserer betydningen til konstruksjonene T og Før i språk som er med i Ep(S;e):

EpE2 LêEp(S;e) & wêI & x,yêD –>
(i) Me(T,L)(x)‘ w=1 <–> Tp(x,w)
(ii) Me(Før, L)(x,y)‘w =1 <–> Før(x,y,w)

Dermed har vi faktisk gitt en fullstendig oversikt over tidsteorien som inngår i E.

Den teorien som nå har blitt spesifisert kunne karakteriseres som en teori om absolutt tid, delvis fordi tiden oppfattes som uavhengig av de mulige verdenene, delvis fordi vi ikke innenfor de enkelte mulige verdener oppfatter før-relasjonen mellom tidspunkter relativt til referansesystemer av forskjellig art. Det er klart det er mulig å utforme en langt mer nyanserte og relativistisk teori hvor tiden kan forandre struktur ettersom man går fra en verden til en annen og hvor f.eks. teorien tillater at tiden kan forgrene seg i noen verdener mens dette ikke behøver å skje i andre.

Imidlertid vil neppe mer eller mindre dyptgående modifiksjoner i det bilde av tid som tegnes av EpE1 og EpE2 ha noen drastiske konsekvenser for resten av teorien. Man kan derfor godt tenke seg at man erstatter disse med helt andre og mer "realistiske" antagelser uten at hovedtrekkene i resten av teorien derfor behøver å endres altfor mye.

§5.1 Ultraintensjonale modifikasjoner av de tidsteoretiske aksiomene.

EpE1 og EpE2 tenkes som et tillegg til T;A. Hvis de vil brukes i forbindelse med T;A* må visse forandringer foretas. Man får EpUE1 fra EpE1 ved å beholde konjunktene (5.1), (5.2) og (5.3) uforandret. Derimot erstatter vi "wêI" i (5.4) og (5.5) med "wêW". Tilsvarende må

man i konjunkten (5.6) erstatte "wêI" med "wêW". (5.7) kan beholdes uforandret og det samme gjelder (5.11) – (5.13). I (5.8) –(5.10) må vi imidlertid føye til "wêI –>" foran formlene. Dermed skulle vi ha angitt fullstendig hvordan EpE1 kan endres. For tydelighetens skyld angir vi konkret den reviderte versjon av EpE1:

EpUE1

(5.1) (Ax)(xêD –> (Aw)(wêI –> Tp(x,w)) v (Aw)(wêI –> ¬Tp(x,w)))
(5.2) (Ax)(Ay)(x,yêD –>
(Aw)(wêI –> Før(x,y,w)) v (Aw)(wêI –> ¬Før(x,y,w)))
(5.3) (Ax)(Ay)(x,yêD –>
(Aw)(wêI –> Avst(z,x,y,w)) v (Aw)(wêI –> ¬Avst(z,x,y,w)))
(5.4) Før(x,y,w) –> Tp(x,w) & Tp(y,w) & wêW
(5.5) Tp(x,w) –>(xêD & wêW)
(5.6) Avst(x,x,y,w) –> wêW & Tp(x,w) & Tp(y,w) & zêReell
(5.7) Reell Inkl D
(5.8) wêI –>(Avst(z,x,y,w) & Før(x,y,w) –> z>0)
(5.9) wêI –>((Før(x,y,w) & Før(y,z,w) &
Avst(r1,x,y,w) & Avst(r2,y,z,w) –>Avst(r1+r2,x,z,w))
(5.10) wêI –>.Avst(z,x,y,w) –> Avst(z,y,x,w)
(5.11) wêI & Tp(x,w) –> Avst(0,x,x,w)
(5.12) wêI & Tp(x,w) & Tp(y,w) –> (E!z)(Avst(z,x,y,w))
(5.13) (Ef)(Cor(f) & Dom(f) = Tp & Rgn(f) = Reell &
(Ax)(Ay)(x,yêTp –> (<x,y>êFør <–> f(x)< f(y)))

Derimot kan EpE2 overtas uforandret:

EpUE2 LêEp(S;e) & wêI & x,yêD –>
(i) Me(T,L)(x)‘ w=1 <–> Tp(x,w)
(ii) Me(Før, L)(x,y)‘w =1 <–> Før(x,y,w)

§6 Oppsummering.

La oss avslutte dette avsnittet med en oppsummering og sammenfatning av de to teoriene som vi så langt har spesifisert:

Definisjon 6.1 T;A+ EpA+EpE er den første-ordens teorien som er entydig bestemt på følgende måte:

(i) Språket til teorien er L;E.
(ii) Aksiomene i teorien er:
(a) Alle aksiomene i T;A
(b) Sm27, samt Ep1 – Ep17 og EpE1, EpE2.
(c) Alle nye instanser av substitusjons- og replacement aksiomskjemaet i L;E
(iii) Slutningsreglene i teorien er modus ponens og universell generalisering.

Den andre teorien vi har angitt kan defineres slik:

Definisjon 6.2 T;A*+ EpA+EpE er den første-ordens teorien som er entydig bestemt på følgende måte:

(i) Språket til teorien er L;E*.
(ii) Aksiomene i teorien er:
  (a) Alle aksiomene i T;A*
  (b) Sm27, samt EpU1 – EpU17 og EpUE1, EpUE2.
  (c) Alle nye instanser av substitusjons- og replacement aksiomskjemaet i L;E*
(iii) Slutningsreglene i teorien er modus ponens og universell generalisering.

Avsnitt B

§0 Innledning.

I dette avsnittet vil vi spesifisere det vi vil kalle de "akseptanseteoretiske aksiomene" i teorien E. I tillegg vil vi også gjøre rede for de epistemiske aksiomene og de aksiomene som har med tro å gjøre. Vi ønsker i denne delen av arbeidet å konstruere en teori som i større grad fikserer betydningen til konstruksjonene (15) – (25) som ble angitt i §2 i Avsnitt A. Teorien er delvis basert på de ideene som ble introdusert i Kapittel I. For eksempel er semantikken til operatorparet <Pre;e, Ekv;e> helt analog med semantikken til konstruksjonsparet <Pr, Ekv> som vi utviklet i Kapittel I. Det samme gjelder konstruksjonsparet <Simp, SimpE>. Videre er semantikken til paret <PrG, EkvG> helt analog med den til konstruksjonene <Pr;c,Ekv;c>[9]. De viktigste grunnbegrepene i denne delen av teorien er de to enkelhetsrelasjonene (1.18) og (1.19) i §1 i Avsnitt A i dette kapitlet.

§1 Aksiomer om aksepterbarhet.

Vi gir først den følgende definisjon:

Definisjon 1.1
(i) R;w = Mg(<x,y>: Enk(x,y,w)v LEnk(x,y,w))
(ii) R*;w = Mg(<x,y>: Enk(x,y,w))
(iii) ~;w = Mg(<x,y>: LEnk(x,y,w))

Fra denne definisjonen fremgår det at R;w = R*;wU ~;R. Det skulle også være klart at <x,y>êR;w hvis og bare hvis x er en verden som er minst like enkel som verdenen y sett relativt til verdenen w. Merk at vi har relativisert enkelhetsrelasjonen til mulige verdener

9 Se Kapittel I, Avsnitt B, §5.

fordi vi ønsker å gi en tolkning av setninger i S;e der konstruksjonene (15) – (25) i §2 forkommer iterert.

Vårt første aksiom er naturligvis fullstendig trivielt:

EpB1 Enk(x,y,w) v LEnk(x.y.w) –> x,y,wêI

Det neste aksiomet er mer substansielt og sier at <R*;w,~;w> er et preferansesystem over I:

EpB2 x,y,zêI & wêI –>

(i) <x,y>êR*;w & <y,z>êR*;w –> <x,z>êR*;w
(ii) <x,y>êR*;w –> ¬(<y,x>êR*;w)
(iii) ¬(<x,x>êR*;w)
(iv) <x,y>êR*;w v <x,y>ê~;w v<y,x>êR*;w
(v) <x,y>ê~;w & <y,z>ê~;w –> <x,z>ê~;w
(vi) <x,y>ê~;w –> <y,x>ê~;w
(vii) <x,x>ê~;w
(viii) <x,y>ê~;w & <y,z>êR*;w. –> <x,z>êR*;w
(ix) <x,y>ê~;w & <z,y>êR*;w. –> <z,x>êR*;w

Det følger umiddelbart fra dette aksiomet og Definisjon 1.1 at R;w er en preferanserelasjon over I. Betrakter man EpB2 virker alle delene av det svært plausible bortsett fra sammenlignsloven (iv). Man kan neppe si at det er umiddelbart selvinnlysende at denne holder. Samtidig virker det ikke helt rimelig å si at den åpenbart er uholdbar. Siden antagelsen forenkler vår teori betraktelig – og kanskje enda viktigere – siden antagelsen ikke synes å ha noen virkelig merkelige konsekvenser vil vi i det følgende fastholde den.

Siden R;w for hver wêI er en preferanserelasjon gjelder naturlig nok alle de teoremene vi beviste i Avsnitt A i Kapittel I om R;w og preferansesystemet <R*;w,~;w>. I dette avsnittet vil vi også selvfølgelig fortsette med å bruke alle de definisjonene som ble innført i Kapittel I. Det følger at Teorem 1.3 – Teorem 1.13, Teorem 2.3 –Teorem 2.4 og Teorem3.2 – Teorem 3.47 i Kapittel I, Avsnitt A gjelder.

Vi kan nå formulere den følgende sentrale akseptanseteoretiske antagelse:

EpB3 LêEp(S;e) & wêI & X,Y,Z ê(2^I) –>

(i) Me(Simp,L)(X,Y)‘w =1 <–> c;-1(X,I) Q(R;w) c;-1(Y,I)
(ii) Me(SimpE,L)(X,Y)‘w =1 <–> c;-1(X,I) E(R;w) c;-1(Y,I)
(iii) Me(EkvG,L)(X,Y,Z)‘w =1 <–>
c;-1(X,I)Ωc;-1(Z,I) E(R;w) c;-1(Y,I)Ωc;-1(Z,I)
(iv) Me(PrG,L)(X,Y,Z)‘w =1 <–>
c;-1(X,I)Ωc;-1(Z,I) Q(R;w) c;-1(Y,I)Ωc;-1(Z,I)
(v) Me(BaG,L)(X,Y,Z)‘w =1 <–> Max(R;w,c;-1(Y,I)) Inkl c;-1(X,I)

La oss nå kommentere dette aksiomet. For det første ser man at det fikserer betydningen til konstruksjonene Simp, SimE, EkvG,PrG, og BaG for alle LêEp(S;e). Spørsmålet er om det fikserer disse betydningene på en korrekt måte.

Anta LêEp(S;e) og at F,GêCFm(L). Da har man at det må finnes noe X0 slik at Me(F,L,v)= X0 for alle verditilordninger v over L. Dette er fordi F er en lukket formel og derfor ikke inneholder fri variabler. Meningen til F kan derfor ikke avhenge av hvilke verdier

man da tilordner variablene i språket. Man kan derfor sette: μ(F) = Me(F,L,v) i det vi i det følgende tenker oss at L er fiksert. μ(F) er da det utsagnet F uttrykker i L og vi har naturligvis at μ(F)ê(2^I). Er wêI har man så at μ(F) er sann i verdenen w hvisog bare hvis wêc;-1(μ(F),I). Kort sagt er c;-1(μ(F),I) klassen av alle de verdener der utsagnet μ(F) er sant. Naturligvis har vi også i lys av de aksiomene som inngår i T;A at

(1) Sann(Simp(F,G),L,w) <–> Me(Simp,L)(μ(F),μ(G))‘w =1

Man ser derfor at punkt (i) i EpB3 er ekvivalent med:

(2) Sann(Simp(F,G),L,w) <–> c;-1(μ(F),I) Q(R;w) c;-1(μ(G),I)

Men denne formelen sier at setningen "De enkleste verdenene der det er tilfelle at F er enklere enn de enkleste verdenene der det er tilfelle at G" er sann i verdenen w hvis og bare hvis de enkleste verdnene relativt til w som inngår i μ(F) er enklere relativt til w enn de tilsvarende enkleste elementene i μ(G). Dette virker åpenbart helt rimelig og kan neppe betviles.

På samme måte innser man at (ii) i EpB3 uttrykker en svært innlysende påstand. Fastholder man nå (i) og (ii) i EpB3 og antar at F,G,HêCFm(L) der LêEp(S;e) ser man lett at (iv) i dette aksiomet er ekvivalent med den følgende påstand:

(3) Sann((PrG(F,G,H) <–> Simp(F&H,G&H)),L,w)

I denne forbindelse kan man sammenligne med aksiom AP2 i kalkylen P2 som ble drøftet i Kapittel I, Avsnitt B. (3) uttrykker at det er slik i enhver verden w at man bør gi opp påstanden G til fordel for påstanden F under forutsetning av at H representerer alt som kan tas for gitt hvis og bare hvis de enkleste verdenene der det er tilfelle at F&H er enklere enn de enkleste verdenene der det er tilfelle at G&H. Siden dette ved ettertanke virker helt rimelig er det vanskelig å finne noen avgjørende argumenter mot (iv) i EpB3. (iii) kan rettferdigjøres på en lignende måte.

Fastholder man nå (i) –(iv) og antar videre at F,GêCTm(L), der LêEp(S:e), og antar til slutt at μ(G) –μ(F), samt at μ(G) inneholder maksimale elementer med hensyn på R;w, ser man at (v) i EpB3 er ekvivalent med:

(4) Sann((BaG(F,G) <–> PrG(F,¬F,G) ,L,w)

Dette sier at det er sant i enhver verden w at man bør akseptere at F er tilfelle gitt at G representerer alt som kan tas for gitt hvis og bare hvis man bør gi opp at F ikke er tilfelle til fordel for at F under forutsetning av at G representerer alt som kan tas for gitt. Også dette virker i høyeste grad plausibelt. Med disse overveielsene i tankene virker det naturlig å se på EpB3 som en helt korrekt påstand i L;E.

La oss nå minne om at e;T(w) og e;T(w,t) ble definert på følgende måte

Definisjon 1.2(i) e;T(w) = (ix)(xê(2^I) & TEvid(x,w))

(ii) e;T(w,t) = (ix)(xê(2^I) & TEvid(x,t,w))

En viktig akseptanseteoretisk antagelse som i visse henseende er analog med EpB3 kan da formuleres slik:

EpB4 LêEp(S;e) & wêI & têD & X,Y ê(2^I) –>

(i) Me(BaG,L)(X,Y,Z)‘w =1 <–>
Max(R;w,c;-1(e;T(w,t),I)) Inkl c;-1(X,I)

(ii) Me(Ba,L)(X,Y,Z)‘w =1 <–>
Max(R;w,c;-1(e;T(w),I)) Inkl c;-1(X,I)

(iii) Me(Pr;e,L)(X,Y)‘w =1 <–>
c;-1(X,I)Ωc;-1(e;T(w),I) Q(R;w) c;-1(Y,I)Ωc;-1(e;T(w),I)

(iv) Me(Ekv;e,L)(X,Y)‘w =1 <–>
c;-1(X,I)Ωc;-1(e;T(w),I) E(R;w) c;-1(Y,I)Ωc;-1(e;T(w),I)
(v) Me(PrT,L)(t,X,Y)‘w =1 <–>
c;-1(X,I)Ωc;-1(e;T(w,t),I) Q(R;w) c;-1(Y,I)Ωc;-1(e;T(w,t),I)
(vi) Me(EkvT,L)(X,Y,Z)‘w =1 <–>
c;-1(X,I)Ωc;-1(e;T(w,t),I) E(R;w) c;-1(Y,I)Ωc;-1(e;T(w,t),I)

Vi vil ikke her fremsette en detaljert rettferdiggjørelse av dette aksiomet. De fleste av påstandene (i) – (vi) er nokså opplagte om man bare husker på lesemåten til konstruksjonene BaT, Ba, Pr;e, Ekv;e, PrT og EkvT. Jeg tror leseren forholdsvis raskt vil innse dette.

Alle formlene EpB1 –EpB4 er formler i L;E og kan uten videre legges til til T;A med språket utvidet til L;E. De kan derfor naturligvis også legges til teorien T;A+EpA+EpE. La oss oppsummere med en definisjon:

Definisjon 1.3 T;A+ EpA+EpE+EpB er den første-ordens teorien som er entydig bestemt på følgende måte:

(i) Språket til teorien er L;E.
(ii) Aksiomene i teorien er:
(a) Alle aksiomene i T;A
(b) Sm27, samt Ep1 – Ep17, EpE1, EpE2 og EpB1 –EpB4.
(c) Alle nye instanser av substitusjons- og replacement aksiomskjemaet i L;E
(iii) Slutningsreglene i teorien er modus ponens og universell generalisering.

§2 Ultraintensjonale modifikasjoner av de akseptanseteoretiske aksiomene.

Vi forandrer EpB1 – EpB4 på den følgende måte: I EpB1 erstatter vi konsekventen "x,y,wêI" med "x,y,wêW". Resultatet kalles EpUB1. I EpB2 behøver vi ikke å foreta noen forandringer. Vi må imidlertid forandre Definisjon 1.2 i §1 til:

Definisjon 2.2(i) e;T(w) = (iz)((Ex)(xê(2^W) & TEvid(x,w) & z=Rest(x,I))
(ii) e;T(w,t) = (iz)((Ex)(xê(2^W) & TEvid(x,t,w) & z=Rest(x,I))

EpUB3 og EpUB4 fremkommer nå fra henholdsvis EpB3 og EpB4 ved å erstatte "X,Y,Zê(2^I)" i antesedenten i aksiomene med "X,Y,Zê(2^W)". I forbindelse med aksiomene EpUB1 – EpUB4 må vi naturligvis alltid bruke Definisjon 2.1 som definisjon av e;T(w) og e;t(w,t).

De nye aksiomene som nå har blitt angitt kan natuligvis legges til de ikke-logiske aksiomene i T;A* med språket utvidet til L;E*. Sagt på en annen måte får man den samme teorien om man utvider T;A* +EpUA+EpUE med disse aksiomene. La oss også i denne forbindelse oppsummere med en definisjon:

Definisjon 2.2 T;A*+ EpUA+EpUE+EpUB er den første-ordens teorien som fremkommer om EpUB1 – EpUB4 legges til T;A*+ EpUA+EpUE som nye ikke-logiske aksiomer.

§3 Konsekvenser av de evidensteoretiske, tidsteoretiske og akseptanseteoretiske aksiomene.

I denne paragrafen vil vi gi en oversikt over en del viktige satser som holder i de utvidelsene av T;A og T;A* som vi har definert ovenfor. Siden fremstillingen ville bli uforholdsmessig lang om vi skulle gi detaljerte bevis for satsene har vi valgt å sløyfe dem. I tillegg til dette er teoremene av en så elementær natur at den interesserte og energiske leser selv kan gi bevis.

Vi bruker i dette avsnittet "S1" som forkortelse for "T;A+EpA+EpE+EpB" og "S2" som forkortelse for "T;A*+EpUA+EpUE+EpUB".
Idet følgende gjør vi oppmerksom på at vi bruker den følgende definisjon av uttrykkene "True(F,L,v,w)", "True(F,L,w)" og "Val;L(F)".

(a) True(F,L,v,w) <–> (iu)(GMen(u,F,L,v))(w)= 1
(b) True(F,L,w) <–> (Av)(Vt(v, (L);1) –> True(F,L,v,w))
(c) Val;L(F) <–> (Aw)(wêI –> True(F,L,w))

Denne definisjonen ble gitt i §1, Kapittel VI, Del I

Det følgende teorem lar seg lett bevise på basis av de evidensteoretiske aksiomene i S1 og S2.

Teorem 3.1 (S1) Anta LêEp(S;e) og F,GêFm(L). Anta x,y,têRgn(Var((L);1)). Da har man at Val;L(S) om S er en av de følgende formler i L:

(i) TEv(F) & Ev(G) –> Nec(F –>G)
(ii) DEv(F) –> Ev(F)
(iii) Nec(F–>G) –> (TEv(F) <–> TEv(G))
(iv) Nec(F–>G) –> (Ev(F) <–> Ev(G))
(v) DEvf(x,t,F) –> Evf(x,t,F)
(vi) Evf(x,t,F) –> Ev(F)
(vii) Evf(x,t,F) –> T(t)
(viii) TEvf(x,t,F) –> T(t)
(ix) DEvf(x,t,F) –> T(t)
(x) TEvf(x,t,F) & Evf(x,t,G) –> Nec(F –>G)
(xi) Se(x,t,F) v Hr(x,t,F) v Er(x,t,F) –> Evf(x,t,F)
(xii) TEv(F) & TEvf(x,t,G) –> Nec(F –>G)
(xiii) TEvt(t,F) & TEvf(x,t,G) –> Nec(F –>G)
(xiv) TEv(F) & TEvt(t,G) –> Nec(F–>G)
(xv) TEv(F) –> Pos(F)
(xvi) TEvt(t,F) –> T(t)
(xvii) TEv(F) & TEv(G) –> Nec(F <–>G)
(xviii) TEvt(t,F) & TEvt(t,G) –> Nec(F <–>G)
(xix) TEvf(x,t,F) & TEvf(x,t,G) –> Nec(F<–>G)
(xx) Nec(F) –> Ev(F)
(xxi) Ev(F) & Ev(F–>G) –> Ev(G)
(xxii) Nec(F<–>G) –>(TEvt(t,F) <–> TEvt(t,G))
(xxiii) Nec(F<–>G) –>(TEvt(x,t,F) <–> TEvt(x,t,G))

Som man ser fra dette teoremet har operatorene TEv, TEvt og TEvf egenskaper som er svært lik operatoren G i preferanselogikken P3 som ble beskrevet i Kapittel I, Avsnitt B. Man ser også at konstruksjonen Ev er en enkel såkalt "K-operator" på samme måte som O i kalkylen P3.

Det neste teoremet kan bare bevises i S1, ikke i S2:

Teorem 3.2 (S1) Anta LêEp(S;e) og F,GêFm(L). Anta x,y,têRgn(Var((L);1)). Da har man at Val;L(S) om S er en av de følgende formler i L:

(i) Nec(F <–>G) –> (Ser(x,t,F) <–> Ser(x,t,G))
(ii) Nec(F <–>G) –> (Hr(x,t,F) <–> Ser(x,t,G))
(iii) Nec(F <–>G) –> (Er(x,t,F) <–> Ser(x,t,G))
(iv) Nec(F <–>G) –> (Evf(x,t,F) <–> Evf(x,t,G))

La oss så se på en sats som med letthet lar seg bevise på grunnlag av de tidsteoretiske aksiomene:

Teorem 3.3 (S1,S2) Anta LêEp(S;e) og F,GêFm(L). Anta x,y,zêRgn(Var((L);1)). Da har man at Val;L(S) om S er en av de følgende formler i L:

(i) T(x)& T(y) –>. Før(x,y) v x=y v Før(y,x)
(ii) T(x) –> (Ey)(T(y) & Før(x,y))
(iii) T(x) –> (Ey)(T(y) & Før(y,x))
(iv) Før(x,y) –> (T(x) & T(y))
(v) Før(x,y) & Før(y,z) –> Før(x,z)
(vi) Før(x,y) –> ¬Før(y,x)
(vii) T(x) –> ¬Før(x,x)
(viii) Før(x,y) –>(Ez)(T(z)& Før(x,z) & Før(z,y))
(ix) Før(x,y) –> Nec(Før(x,y))
(x) T(x) & T(y) & ¬Før(x,y) –> Nec(¬Før(x,y))
(xi) T(x) –> Nec(T(x))
(xii) ¬T(x). –> Nec(¬T(x))

Formlene (9) – (12) avspeiler her direkte antagelsene (5.1) – (5.2) i §1 i Avsnitt A. Begge antagelsene inngår naturligvis i EpE1.

La oss så se på noen konsekvenser av de akseptanseteoretiske aksiomene:

Teorem 3.4 (S1,S2) Anta LêEp(S;e) og F,G,HêFm(L). Da har man at Val;L(S) om S er en av de følgende formler i L:

(i) Simp(F,G) & Simp(G,H) –> Simp(F,H)
(ii) Simp(F,G) –> ¬ Simp(G,H)
(iii) ¬Simp(F,F)
(iv) SimpE(F,G) & SimpE(G,H) –> SimpE(F,H)
(v) SimpE(F,G) –> SimpE(G,F)
(vi) SimpE(F,G) & Simp(G,H) –> Simp(F,H)
(vii) SimpE(F,G) & Simp(H,G) –> Simp(H,F)
(viii) SimpE(F,G) v Simp(F,G). –> Pos(F) & Pos(G)
(ix) Simp(F,G) –> Simp(F&¬G,G)

(x) SimpE(F,F) & SimpE(G,G) –>
(Simp(F,G) v SimpE(F,G) vSimp(G,F))

Dette teoremet viser de grunnleggende egenskapene til konstruksjonene Simp og SimpE. Man kan sammenligne (i) – (x) med aksiomene AP0-1 – AP0-10 i §7, Kapittel I, Avsnitt B. Teoremet bevises lett ved hjelp av EpB3, (i), (ii) samt EpB2 og Teorem 3.2 i §3 i Kapittel 1, Avsnitt A.

La oss å betrakte:

Teorem 3.5 (S1,S2) Anta LêEp(S;e) og F,G,HêFm(L). Anta têRgn(Var((L);1)). Da har man at Val;L(S) om S er en av de følgende formler i L:

(i) PrG(F,G,H) <–> Simp(F&H, G&H)
(ii) EkvG(F,G,H) <–> SimpE(F&H, G&H)
(iii) SimpE(F,F) & SimpE(F&¬G,F&¬G) –>
(BaG(G,F) <–> Simp(F&G, (¬F)&G))
(iv) Nec(F –>G) –> BaG(G,F)
(v) SimpE(F,F) & Simp(G&F, (¬G)&F) –>BaG(G,F)
(vi) TEv(G) –> (Ba(F) <–> Ba(F,G))
(vii) Ba(F) & Ba(F–>G) –> Ba(G)
(viii) Nec(F) –> Ba(F)
(ix) TEvt(t,G) –> (BaT(t,F) <–> BaG(F,G))
(x) BaT(t,F) & BaT(t, F–>G) –> BaT(t,G)
(xi) TEv(H) –> (PrG(F,G,H) <–> Pr;e(F,G))
(xii) TEv(H) –> (EkvG(F,G,H) <–> Ekv;e(F,G))
(xiii) TEvt(t,H) –> (PrG(F,G,H) <–> PrT(t,F,G))
(xiv) TEvt(t,H) –> (EkvG(F,G,H) <–> EkvT(t,F,G))
(xv) Pr;e(F,G) & Pr;e(G,H) –> Pr;e(F,H)
(xvi) Pr;e(F,G) –> ¬Pr;e(G,F)
(xvii) ¬Pr;e(F,F)
(xviii) Ekv;e(F,G) & Ekv;e(G,H) –> Ekv;e(F,H)
(xix) Ekv;e(F,G) –> Ekv;e(G,F)
(xx) (Ekv;e(F,G) v Pr:e(F,G)) –> Pos(F) & Pos(G)
(xxi) Ekv;e(F,F) & Ekv;e(G,G) <–>
(Pr;e(F,G) v Ekv;e(F,G) v Pr;e(G,F))
(xxii) Pr;e(F,G) <–> Pr;e(F&¬G,G)

Det bør bemerkes at både Teorem 3.4 og Teorem 3.5 lar seg bevise i både S1 og S2. Det siste teoremet lar seg lett bevise ved hjelp av EpB3 og EpB4 ced i tillegg å benytte de satsene vi gjennomgikk i Kapittel I, Avsnitt A.

Den følgende sats er nærmest triviell:

Teorem 3.6 (S1,S2) Anta LêEp(S;e) og FêHêFm(L). Anta x,têRgn(Var((L);1)). Da har man at Val;L(S) om S er en av de følgende formler i L:

(i) Vfs(x,t,F) –>F
(ii) Se(x,t,F) v Hr(x,t,F) v Er(x,t,F) –> F
(iii) Se(x,t,F) v Hr(x,t,F) v Er(x,t,F) –> Evf(x,t,F)
(iv) Vfs(x,t,F) –> Evf(x,t,F)

(v) Se(x,t,F) & Pos(¬F) –> Vfs(x,t,F)
(vi) Hr(x,t,F) & Pos(¬F) –> Vfs(x,t,F)

Setningen kan bevises i både S1 og S2.

Vi ser dernest på det følgende teorem:

Teorem 3.7 (S1, S2) Anta LêEp(S;e) og F,G,HêFm(L). Anta x,têRgn(Var((L);1)). Da har man at Val;L(S) om S er en av de følgende formler i L:

(i) Nec(F–>G) & Ev(¬G) –> ¬Ba(F)
(ii) Nec(F–>G) & Ev(t,¬G) –> ¬Ba(F)
(iii) TEvt(t,F) & Nec(F–>H) & Nec(G –>¬H) –> ¬Ba(F)
(iv) Nec(F–>G) & Se(x,t,¬G) –> ¬Ba(F)
(v) Nec(F–>G) & Hr(x,t,¬G) –> ¬Ba(F)
(vi) Nec(F–>G) & Er(x,t,¬G) –> ¬Ba(F)
(vii) Nec(F–>G) & (Se(x,t,¬G) v Hr(x,t,¬G) v Er(x,t,¬G)) –> ¬Ba(t,F)
(viii) Ba(¬F) –> ¬Ba(F)
(ix) Ev(F) & Nec(F –>G) –> Ba(G)

Også denne setningen kan bevises i både S1 og S2. Helt tilslutt nevner vi den følgende sats som viser noen av de viktigste egenskapene ved konstruksjonen BaG.

Teorem 3.8 (S1, S2) Anta LêEp(S;e) og F,G,HêFm(L). Da har man at Val;L(S) om S er en av de følgende formler i L:

(i) SimpE(G,G) –> BaG(F,G) –> ¬BaG(¬F,G)
(ii) BaG(Gv¬F,H) & BaG(F,H) –> BaG(G,H)
(iii) SimpE(F,F) –> ¬BaG(¬F,F)
(iv) BaG(F,F)
(v) BaG(F,G&H) –> BaG(Fv¬H,G)
(vi) BaG(FvG,H) & ¬BaG(G,H). –> BaG(F,H&¬G)
(vii) BaG(F,G) & BaG(F,H). –> BaG(F,GvH)
(viii) BaG(F,GvH) –> (BaG(F,G) v BaG(F,H))
(ix) BaG(F,H) & BaG(G,F&H). –> BaG(F&G,H)
(x) SimpE(H,H) –>(BaG(F&G,H) –> BaG(F,G&H))
(xi) BaG(F,H) & ¬BaG(¬G,H). –> BaG(F,H&G)

Teorem 3.8 bør sammenlignes med Teorem 3.47 i Kapittel I, Avsnitt A. Det kan lett bevises ved hjelp av dette sistnevnte teorem.

Dette avslutter oversikten over en del av de viktigste umiddelbare konsekvensene av de aksiomene om evidens, aksepterbarhet og tid som vi har inludert i teoriene S1 og S2.

§4 Epistemiske og doxastiske aksiomer.

I språket L;E har vi inkludert de følgende to predikater:

"x er et utsagn som representerer noe y vet er tilfelle ved tidspunktet t i verdenen w" "Vet(x,y,t,w)"
"x er et utsagn som representerer noe y tror er tilfelle

ved tidspunktet t i verdenen w" "Tror(x,y,t,w)"

Den følgende setning i L;E relaterer disse to predikatene til en del av de andre predikatene i dette språket:

EpC1 (a) (i) Vet(x,y,t,w) –> xê(2^I) & wêI & Tp(t,w) & yêD
(ii) Tror(x,y,t,w) –> xê(2^I) & wêI & Tp(t,w) & yêD
(iii) Vet(x,y,t,w) –> x(w) =1
(iv) Ser(x,y,t,w) v Hør(x,y,t,w) v Er(x,y,t,w) v VS(x,y,t,w) –> Vet(x,y,t,w)
(v) Vet(x,y,t,w) –> Tror(x,y,t,w)
(vi) LêEp(S;e) & xê(2^I) & y,têD & wêI –>
Me(Vet,L)(y,t,X)‘w=1 <–> Vet(X,y,t,w)
(vii) LêEp(S;e) & xê(2^I) & y,têD & wêI –>
Me(Tror,L)(y,t,X)‘w=1 <–> Tror(X,y,t,w)

De fleste klausulene i dette aksiomet tror jeg at skulle virke rimelige på de aller fleste.

I hvert LêEp(S;e) inngår de følgende to konstruksjoner:

"x vet implisitt ved tidspunktet t at F er tilfelle" "VetI(x,t,F)"
"x tror implisitt ved tidspunktet t at F er tilfelle" "TrorI(x,t,F)"

Den intenderte betydningen til en setning av typen "VetI(x,t,F)" kunne man tenke seg å uttrykke ved "Hvis x ved tidspuktet t kjenner til alle konsekvenser av det vedkommende faktisk vet ved dette tidspunkt så vet x at F er tilfelle ved t". Tilsvarende kunne man tenke seg å uttrykke den intenderte betydningen til "TrorI(x,t,F)" ved "Hvis x ved tidspuktet t kjenner til alle konsekvenser av det vedkommende faktisk tror ved dette tidspunkt så tror x at F er tilfelle ved t". Hvis dette er korrekt skulle det følgende aksiom om meningen til konstruksjonene TrorI og VetI i språk L der LêEp(S;e) virke fornuftig:

EpC2 (vi) LêEp(S;e) & Xê(2^I) & y,têD & wêI –>
(Me(VetI,L)(y,t,X)‘w=1 <–>
c;-1(SNu(Mg(Z: Vet(Z,x,t,w))),I) Inkl c;-1(X,I))
(vii) LêEp(S;e) & Xê(2^I) & y,têD & wêI –>
(Me(TrorI,L)(y,t,X)‘w=1 <–>
c;-1(SNu(Mg(Z: Tror(Z,x,t,w))),I) Inkl c;-1(X,I))

Jeg tror man ved endel ettertanke skulle kunne se at disse to semantiske antagelsene fanger inn betydningene til de to konstruksjonene dersom de lesemåtene som ble nevnt ovenfor er korrekte.

La oss kalle teorien S1 utvidet med EpC1 og EpC2 for S1'. Man har da:

Teorem 4.1 (S1') Anta LêEp(S;e) og F,GêFm(L). Anta x,têRgn(Var((L);1). Da har man at Val;L(S) om S er en av de følgende formler i L:

(i) Se(x,t,F) –> Vet(x,t,F)
(ii) Hø(x,t,F) v Er(x,t,F) v Vfs(x,t,F) –> Vet(x,t,F)

(iii) Vet(x,t,F) –> Tror(x,t,F)
(iv) Vet(x,t,F) –> VetI(x,t,F)
(v) Tror(x,t,F) –> TrorI(x,t,F)
(vi) VetI(x,t,F) –> TrorI(x,t,F)
(vii) Nec(F) –> VetI(x,t,F)
(viii) Nec(F) –> TrorI(x,t,F)
(ix) VetI(x,t,F) & VetI(x,t,F–>G) –> VetI(x,t,G)
(x) TrorI(x,t,F) & TrorI(x,t,F–>G) –> TrorI(x,t,G)
(xi) TrorI(x,t,F) –> T(t)

Beviset for denne satsen overlates til leseren. Man ser at den er en forholdsvis direkte konsekvens av de to tesene EpC1 og EpC2.

Hvis en person ved tidspunktet t vet at F er tilfelle og G representerer alt som vedkommende kan ta for gitt ved t virker det nærligende å tro at F bør aksepteres relativt til F. I motsatt fall virker det uberettiget å hevde at vedkommende vet at F. Dette kravet er uttrykt i den følgende setning:

EpC3 Z,Xê(2^I) & y,têD & wêI –> .
Vet(X,y,t) & TEvid(Z,y,x,t) –> Max(R;w,c;-1(Z,I)) Inkl c;-1(X,I)

La oss kalle første-ordens teorien S1' utvidet med EpC3 som nytt ikke-logisk aksiom for S1". Da har man åpenbart:

Teorem 4.2 (S1") Anta LêEp(S;e) og F,GêFm(L). Anta x,têRgn(Var((L);1). Da har man at Val;L(S) om S er en av de følgende formler i L:
(i) Vet(x,t,F) & TEvf(x,t,G) –> BaG(F,G)

§5 Defintiv aksepterbarhet.

Selvom en påstand G kan være evident og en annen påstand F bør aksepteres relativt til G kan det likevel være at det finnes andre evidente påstander H;1,..,H;n som er forenelige med G og som er av en slik natur at F ikke bør aksepteres relativt til G&Konj/i,1,n/(H;i). Hvis slik tilleggsevidens ikke influerer på aksepterbarheten til F relativt til G vi vi si at F definitivt bør aksepteres relativt til G.

Vi vil nå forsøke å gjøre dette begrepet om definitiv aksepterbarhet mer presist. Først introduserer vi konstruksjonen:

(5.1) "Det at F bør definitivt aksepteres gitt at G" "DaG(F,G)"

Vi vil heretter anta at denne kontruksjonen er med i P;<0,0,2>(S;e), dvs. at den er en binær formeldannende konstruksjon i S;e.

Vi definerer så mengden Q ved:

Definisjon 5.2 Q = Mg(x: (Ey)(Et)(Ew)(têTp & wêI & Evid(x,y,t,w))

Q er altså klassen av alle utsagn x der x er evident for en eller annen person ved et eller annet tidspunkt i en eller annen logisk mulig verden w. Mengden Q vil vi heretter kalle for mengden av alle potesielt evidente utsagn.

La oss så definere:

Definisjon 5.3C(x,y) <–> (xê(2^I) & (Ez)(z Inkl Q & y=zU{x} & Cons(zU{x})))[10]

Som man ser holder C(x,y) hvis og bare hvis mengden y er en utvidelse av {x} med potensielt evidente utsagn som er konsistent. Det skulle være temmelig opplagt at man må ha C(x,y) –> c;-1(SNu(y),I) Inkl c;-1(x,I).

Vi innfører nå predikatet "Utsagnet x bør i verdenen w aksepteres relativt til y" som forkortes ved hjelp av uttrykket "B;w(x,y)", og predikatet "Utsagnet x bør i verdenen w definitivt aksepteres relativt til y" som forkortes ved "DefB;w(x,y)", ved den følgende definisjon:

Definisjon 5.3(i) B;w(x,y) <–> (x,yê(2^I) & wêI &
Max(R;w,c;-1(y,I)) Inkl c;-1(x,I))

(ii) DefB;w(x,y) <–>. B;w(x,y) &
(Az)(C(y,z) –> B;w(x,SNu(z)))

DefB;w(x,y) holder altså hvis og bare hvis x bør aksepteres i verdenen w reltivt til y og det er slik at x bør aksepteres i verdenen w relativt til SNu(z) for enhver konsistent utvidelse av {y} med potensielt evidente utsagn.

Vi vil nå betrakte det følgende aksiom angående konstruksjonen DaG:

EpC4 (LêEp(S;e) & X,Yê(2^I) &wêI) –>.
Me(DaG,L)(X,Y)‘w =1 <–> DefB;w(X,Y)

Det skulle være klart at dette aksiomet tillegger konstruksjonen DaG den intenderte betydning i alle LêEp(S;e).

Vi skal så betrakte:

EpC5 (Z,Xê(2^I) & y,têD & wêI) –>.
Vet(X,y,t,w) & TEvid(Z,y,t,w) –> DefB;w(X,Z)

Dette aksiomet er sterkere enn EpC3. Det forkommer meg å være plausibelt. Derimot kan den følgende påstand virke noe dristig:

EpC6 (Xê(2^I) & y,têD & wêI) –>
(Vet(X,y,t,w) –> (EZ)(TEvid(Z,y,t,w) & Max(R;w, c;-1(Z,I))≠ø))

Dette aksiomet uttrykker at dersom X er et utsagn som y ved er sant ved tidspunktet t i verdenen w så finnes det et utsgan som representerer totaliteten av alt y kan ta for gitt ved

10 Merk at "Cons(X)" leses "X er en konsistent utsagnsmengde". En konsistent utsagnsmengde er en mengde av utsagn der det finnes en eller annen logisk mulig verden hvor alle utsagnene i mengden er sanne. Formelt sett kan predikatet "Cons(X)" definere slik:

Cons(X) <–> (X Inkl (2^I) & (Ew)(wêI & (Ay)(yêX –> y(w)=1)))

tidspunktet t i verdenen w og klassen av de verdener der dette utsagnet er sant inneholder R;w-maksimale elementer. Man kan ikke si at dette aksiomet er helt innlysende. Vi tar det likevel med blandt aksiomene i teorien E siden det ikke synes å være slik at man får noen motsigelse om det legges til de øvrige aksiomene i denne teorien.

Formlene EpC1 – EpC6 kalles for de epistemisk/doxastiske aksiomene i teorien E.

La oss nå oppsummere ved å gi en rigorøs beskrivelse av de teoriene vi så langt har beskrevet. Teorien T;A, med språket utvidet til L;E, og med alle nye instanser av replacement og utsondringsaksiomet i L;E lagt til som nye ikke-logiske aksiomer, betegnes med T;A[L;E]. Utvides T;A[L;E] med EpA1 – EpA17 som nye ikke-logiske aksiomer kalles resultatet for T;A[L;E]–I. Utvides så T;A[L;E]–I med EpE1 og EpE2 kaller vi resultatet for T;A[L;E]–II. Utvides så T;A[L;E]–II med EpB1 – EpB4 kalles resultatet for T;A[L;E]–III. Utvider man tilslutt T;A[L;E]–III med EpC1 – EpC6 betegnes den resulterende teorien med T;A[L;E]–IV

Vi skal nå betrakte noen generaliseringer av begrepsdannelsene som ble innført ved Definisjon 5.3 og Definisjon 5.4.

La oss først definere:

Definisjon 5.5 C(Z,x,y) <–>
(xê(2^I) & (Ew)(w Inkl Z & y = wU{x} & Cons(wU{x})))

Definisjonen innebærer at C(Z,x,y) holder hvis og bare hvis y er en konsistent utvidelse av {x} med elementer hentet fra Z. Det er underforstått at denne definisjonen bare brukes om Z er en eller annen mengde av utsagn. Det skulle være temmelig klart at man har:

Teorem 5.6 Z Inkl (2^I) & C(Z,x,y). –> c;-1(SNu(y),I) Inkl c;-1(x,I)

Beviset for denne satsen overlates som en øvelse til leseren. Dernest innfører vi "DefB;w(Z,x,y)", som kan leses "Utsagnet x bør definitivt aksepteres relativt til utsagnet y i verdenen w modulo Z", ved:

Definisjon 5.7 DefB;w(Z,x,y) <–> B;w(x,y) &
(As)(C(Z,y,s) –> B;w(x,SNu(s)))

Tilslutt defineres utsagnsmengden E;0 ved:

Definisjon 5.8 E;0 = Mg(x: (Ew)(wêI & Evid(x,w)))

Som man ser er E;0 klassen av alle de utsagn som er evidente i en eller annen verden. I lys av de evidensteoretiske aksiomene skulle det være enkelt å se at
Q Inkl E;0. Dette følger fra EpA6.

I stedet for aksiomene EpC4 og EpC5 kunne det være interessant å studere de følgende to formler:

EpC+ (AL)(LêEp(S;e) –> (AX)(AY)(X,Yê(2^I) –>
(Aw)(wêI –> (Me(DaG,L)(X,Y)‘w =1 <–> DefB;w(E;0,X,Y)))))

EpC++(AZ)(AX)(Ay)(At)(Aw)(Z,Xê(2^I) & y,têD & wêI. –>
(Vet(X,y,t,w) & TEvid(Z,y,t,w). –> DefB;w(E;0,X,Z)))

Det er ikke meningen at noen av disse to formlene skal være aksiomer i noen av våre teorier. Vi er bare interessert i å studere konsekvensene av dem i nærvær av våre andre, mer "offisielle", aksiomer.

La oss akkurat i denne paragrafen kalle T;A[L;E]–III utvidet med EpC1 – EpC3, men ikke noen av de andre epistemisk/doxastiske aksiomene for S.

Det kan forekomme en som om man kan ha en berettiget mistanke om at hypotesene EpC+ og EpC++ er noe for sterke.

Poenget med å innføre den definitive akseptanseoperatoren DaG er at denne skal ligge mellom strikt implikasjon og den vanlige akseptanseoperatoren BaG. Det er med andre ord et desiratum at følgende implikasjoner skal holde:

(‡) Nec(F–>G) –> DaG(G,F) –> BaG(G,F)

Implikasjonene den andre veien bør imidlertid ikke uten videre holde om DaG skal kunne tillegges den betydning som vi her har i tankene. Teorem 5.9 nedenfor viser imidlertid at EpC+ og EpC++ leder til konsekvenser som strider mot dette desiratum innenfor rammen av S.

La oss før vi går løs på dette teoremet fiksere visse begreper:

Definisjon 5.10
(i) Ctg(x) <–> (xê(2^I) &
(Ew;1)(Ew;2)(w;1,w;2êI & x(w;1)=0 & x(w;2)=1))
(ii) E;0+ = E;0 Ω Mg(x: Ctg(x))
(iii) Neg(x) = c(Mg(w: wêI & x(w)=0),I)

Som man ser innebærer Ctg(x) at x er et utsagn som er usant i minst en verden og som er sant i minst en annen logisk mulig verden. Et utsagn som kan skifte sannhetsverdi når man går fra en verden til en annen vil vi kalle for et kontigent utsagn. Uttrykket "Ctg(x)" kan derfor leses "x er et kontingent utsagn".
E;0+ er snittet av utsagnsmengden E;0 og mengden av alle kontingente utsagn. Dette vil si at E;0+ er de kontingente utsagnene i E;0. Neg(x) er utsagnet som er sant i nøyaktig de logisk mulige verdenene hvor utsagnet x er sant. Dette vil si at Neg(x) er det utsagnet som er negasjonen av utsagnet x.

Etter disse forberedelsene kan vi nå presentere den følgende sats:

Teorem 5.9 Anta at følgende holder:
(i) Cons(X) & X Inkl (2^I) & X Inkl E;0
(ii) Neg"(E;0+) Inkl E;0+
(iii) yê(2^I) & (Ew)(wêI & (SNu(X))‘w =0)
(iv) DefB;w(E;0,y,SNu(X))
Da gjelder :
c;-1(SNu(X),I) Inkl c;-1(y,I)

Bevis: Fra den tredje forutsetningen følger at det finnes noe w;1 der

(1) w;1êI & (SNu(X))‘(w;1) =0. Fra forutsetning (i) og definisjonen av Cons følger at det finnes noe w;2 der man har: (2) w;2êI & (SNu(X))‘w;2 =1. Fra (1) følger at det finnes noe z0 der man har: (3) z0êX & z0(w;1)=0. Vi betrakter z1 definert ved z1 = Neg(z0). I lys av (2) og (3) må man ha at (4) z0(w;2)=1. Fra dette og (3) følger at z0, såvel som z1, er kontingente utsagn: (5) Ctg(z0) & Ctg(z1). Fra (3) og (5) kan man slutte i kraft av Definisjon 5.10 at (6) z0êE;0+ og derfor ved hjelp av forutsetning (ii) at (7) z1êE;0+. Nå har man åpenbart at:

(8) (Av)(vêc;-1(SNu(X),I) –> Cons(c(c;-1(z1,I)U {v},I))

Siden c;-1(z1,I) Inkl c;-1(z1,I)U{v} om vêc;-1(SNu(X),I) har vi i lys av det faktum at z1êE;0 og EpA13 at

(9) c(c;-1(z1,I)U{v},I) êE;0. Videre må man ha:

Ctg(c(c;-1(z1,I)U{v},I)) og derfor at c(c;-1(z1,I)U{v},I)êE;0+ om vêc;-1(SNu(X),I). Er nå vêc;-1(SNu(X),I) må man videre i lys av (3) ha at z0(v)=1 og derfor at z1(v)=0. Det følger at:

(10) (Av)(vêc;-1(SNu(X),I) –> c;-1(SNu(X U{c(c;-1(z1,I)U{v},I)}),I)= {v})

Følgelig har vi i lys av Definisjon 5.5 at:

(11) (Av)(vêc;-1(SNu(X),I) –>
C(E;0, SNu(X), {SNu(X)}U{ c(c;-1(z1,I)U{v},I) }))

Fra dette, den siste forutsetningen og Definisjon 5.7 følger:

(12) (Av)(vêc;-1(SNu(X),I) –>
B;w(y, {SNu(X)}U{ c(c;-1(z1,I)U{v},I) }))

I lys av (10) impliserer dette:

(13) (Av)(vêc;-1(SNu(X),I) –> B;w(y,c({v},I))

Herav kan man så slutte: (Av)(vêc;-1(SNu(X),I) –> Max(R;w,{v}) Inkl c;-1(y,I))
Men Max(R;w,{v}) = {v} om vêI=D(R;w). Man har derfor:

(Av)(vêc;-1(SNu(X),I) –> {v} Inkl c;-1(y,I)). Men dette impliserer:
c;-1(SNu(X),I) Inkl c;-1(y,I). **Q.E.D.**

Situasjonen som er beskrevet i Teorem 5.9 kan analyseres mer omhyggelig. Det følgende teorem er en skjerpet versjon av Teorem 5.9:

Teorem 5.11 Anta følgende holder:

(i) Neg"(E;0+) Inkl E;0+
(ii) (Ey)(yêE;0 & Ctg(y))
(iii) x,yê(2^I) & w'êI & DefB;w'(E;0,y,x)
(iv) Ctg(x).

Holder disse forutsetningene gjelder:

c;-1(x,I) Inkl c;-1(y,I)

Bevis: Fra den andre forutsetningen følger at det finnes z, w1,w2 slik at (1) zêE;0 og (2) z(w1)=0 og z(w2)=1. Anta nå for vilkårlig w at (3) wêc;-1(x,I). Vi sondrer mellom to hovedtilfeller:

Tilfelle (i): (4) c;-1(z,I)Ωc;-1(x,I) =ø. Siden (5) c;-1(z.I) Inkl c;-1(z,I)U{w} har ved hjelp av (1) og EpA13 at (6) c(c;-1(z,I)U{w},I)êE;0. Nå har man generelt i kraft av definisjonen av "C(Z,x,y)" at:

(7) (Ax)(Ay)(C(E;0,x,y) <–>
(xê(2^I) & (Ew)(w Inkl Z & y = wU{x} & Cons(wU{x}))))

Vi må derfor ha: (8) C(E;0,x, {x, c(c;-1(z,I)U{w},I)}). Fra den siste konjunkten i den tredje forutsetningen følger:

(9) B;w'(y,x) & (Az)(C(E;0,x,z) –> B;w'(y, SNu(z)))

Fra (8) og (9) følger det at:

(10) B;w'(y, SNu({x, c(c;-1(z,I)U{w},I)})). I lys av (3) og (4) impliserer dette:

(11) B;w'(y, c({w},I)). Dette er ekvivalent med

(12) Max(R;w,{w}) Inkl c;-1(y,I). Nå har man:

(13) (Ax)(xêI –> Max(R;w,{x}) ={x}). Fra (12) og (13) følger wêc;-1(y,I).

Påstanden holder derfor i dette tilfellet.

Tilfelle (ii): c;-1(z,I)Ωc;-1(x,I) ≠ø. Vi sondrer da mellom to undertilfeller:

Tilfelle (ii.a): (15) ¬(wêc;-1(z,I)). La oss sette per definisjon:

P1 = {Neg(z), c(c;-1(z,I)U{w},I)}. Man har da (16) P1 Inkl E;0 & Cons(P1). Merk her at zêE;0 i følge (1) og også at z er kontingent i følge (2). Da har vi zêE;0+. Men i lys av den andre forutsetningen følger da at Neg(z)êE;0+ og derfor at Neg(z) Inkl E;0. Siden zêE;0 følger det at c(c;-1(z,I)U{w},I)êE;0 i lys av EpA13. Vi må å også ha at (17) Cons(P1U{x}) Dette følger ved hjelp av (3) og (15). Fra dette og (7) ovenfor kan man slutte: (18) C(E;0,x, P1U{x}). Videre har man at:

SNu(P1U{x})= c({w},I). I lys av den tredje hypotesen følger (9) ovenfor og man har derfor: (19) Max(R;w', {w}) Inkl c;-1(y,I). Fra dette følger wêc;-1(y,I).

Tilfelle (ii.b) (21) wêc;-1(z,I). Man har da at:

(22) c((I– c;-1(z,I))U{w},I)êE;0. Dette er fordi Neg(z) êE;0 i kraft av (1), (2) og den første forutsetningen, og fordi man ved hjelp av EpA13 har:

c:-1(Neg(z),I) = (I– c;-1(z,I)) Inkl (I– c;-1(z,I))U{w}. La oss nå sette per definisjon:

P2 = {z, c((I– c;-1(z,I))U{w},I)}. Da har man:

(23) Cons(P2U{x}) & P2 Inkl E;0. Det følger da at (24) C(E;0,x, P2U{x}) og derfor at B;w'(y,SNu(P2U{x})). Men siden SNu(P2U{x}) = c({w},I) følger da på samme måte som tidligere at wêc;-1(y,I).

I alle tilfellene har vi at wêc;-1(y,I). Men siden w var et vilkårlig element som oppfylte betingelsen (3) har man c;-1(x,I) Inkl c;-1(y,I). **Q.E.D.**

Som et umiddelbart korollar til Teorem 5.11 har man:

Teorem 5.12 Anta følgende holder:

(i) EpC+

(ii) Neg"E;0+ Inkl E;0+

(iii) LêEp(S;e) & F,GêFm(L).

Da har man at Val;L(S) om S er en av de følgende to formler:

(a) DaG(F,G) –> Nec(G –>F)

(b) Nec(DaG(F,G) –> Nec(G –>F))

Siden konklusjonen i dette teoremet strider mot det desiratum angående operatoren DaG som ble nevnt ovenfor, samtidig som alle forutsetningene utenom EpC+ virker forholdsvis rimelige, synes det nærliggende å trekke den slutning at EpC+ er et temmelig tvilsomt prinsipp.

I forbindelse med Teorem 5.11 – 5.12 kan det også være av interesse å nevne:

Teorem 5.13 Anta Neg"E;0+ Inkl E;0+ og LêEp(S;e) & F,GêFm(L). Da gjelder at Val;L(S) om S er den følgende formel:

Nec(F) & DaG(G,F) –> Nec(F–>G)

Denne umiddelbare konsekvens av Teorem 5.12 viser naturligvis ikke at det er noe i veien med EpC+. Vi bemerker at Teorem 5.9 – Teorem 5.13 alle er utledbare i teorien S som ble fiksert ovenfor.

Tilslutt nevner vi den følgende sats som viser en del viktige egenskaper til konstruksjonen DaG:

Teorem 5.14 (T;A[L;E]–IV). Anta LêEp(S;e), F,G,H,H;1,....,H;nêFm(L) & x,têRgn(Var(L)). Da gjelder det at Val;L(S) om S er en av de følgende formler:

(i) TEvt(t,F) & DaG(G,F) –> Ba(G)
(ii) Vet(x,t,F) –> Ba(F)
(iii) DaG(F,G) –> BaG(F,G)
(iv) Nec(F –> G) –> DaG(G,F)
(v) DaG(F,G) & Pos(G&H) & TEvt(t,H) –> Ba(F,G&H)
(vi) Vet(x,t,F) & TEvf(x,t,G) –> DaG(F,G)
(vii) DaG(F,G) & Pos(G&H) & Pos(Evf(x,t,H)) –> BaG(F, G&H)
(viii) DaG(F,G) & Pos(G&Konj/i,1,n/(H;i)) &
Konj/i,1,n/(Pos(Evf(x,t,H;i))) –> BaG(F, G& Konj/i,1,n/(H;i))

Det bør bemerkes at vi ikke med dette teoremet har villet gi noen fullstendig oversikt over de lovene som gjelder for operatoren DaG i språk L der LêEp(S;e).

§6 Ultraintensjonale modifikasjoner av de epistemiske og doxastiske akiomene.

Vi har tidligere angitt hvordan man kan modifisere de evidensteoretiske, tidsteoretiske og akseptanseteoretiske aksiomene slik at de kan legges til T;A*. Vi vil nå gjennomgå våre epistemiske og doxastiske aksiomer og angi hvordan de må modifiseres hvis de skal legges til som nye ikke-logiske aksiomer til T;A*.

Siden vi i T;A* har innført verdener som i prinsippet ikke behøver å være logisk mulige og følgelig i T;A* må dra et skille mellom blandt annet utsagn og det vi har kalt ultrautsagn, er det nærliggende å foreslå følgende endring av EpC1:

EpUC1 (a) (i) Vet(x,y,t,w) –> xê(2^W) & wêW & Tp(t,w) & yêD
(ii) Tror(x,y,t,w) –> xê(2^W) & wêW & Tp(t,w) & yêD
(iii) Vet(x,y,t,w)&wêI –> x(w) =1
(iv) wêI &Ser(x,y,t,w) v Hør(x,y,t,w) v
Er(x,y,t,w) v VS(x,y,t,w). –>Vet(x,y,t,w)
(v) Vet(x,y,t,w) &wêI –> Tror(x,y,t,w)
(vi) LêEp(S;e) & xê(2^W) & y,têD & wêI –>
Me(Vet,L)(y,t,X)‘w=1 <–> Vet(X,y,t,w)
(vii) LêEp(S;e) & xê(2^W) & y,têD & wêI –>
Me(Tror,L)(y,t,X)‘w=1 <–> Tror(X,y,t,w)

Videre er det nærliggende å foreslå den følgende forandring av EpC2:

EpUC2 (vi) LêEp(S;e) & Xê(2^W) & y,têD & wêI –>
(Me(VetI,L)(y,t,X)‘w=1 <–>
c;-1(SNu(Mg(Rest(Z,I): Vet(Z,x,t,w))),I) Inkl c;-1(X,I))
(vii) LêEp(S;e) & Xê(2^W) & y,têD & wêI –>
(Me(TrorI,L)(y,t,X)‘w=1 <–>
c;-1(SNu(Mg(Rest(Z,I): Tror(Z,x,t,w))),I) Inkl c;-1(X,I))

Det bør bemerkes at vi strengt tatt ikke har definert "SNu(X)" om X Inkl (2^W). Vi har bare definert dette uttrykket om X Inkl (2^I), og da som man husker ved:

SNu(X) = c(SN(Mg(c;-1(x,I): xêX)),I)

Se i denne forbindelse Definisjon 3.2 i §3 i Avsnitt A og kommentarene til den.
Man bør i denne forbindelse også huske på at dersom xê(2^B) og A Inkl B så har man at c;-1(x,A) = Mg(z: zêA & x(z)=1). Man har derfor om xê(2^B) og A inkl B at følgende holder: c(c;-1(x,A),A) = Rest(x,A). Som man sikkert husker betegner Rest(x,A) restriksjonen av funksjonen x til mengden A.

EpC3 må modifiseres slik:

EpUC3 Z,Xê(2^W) & y,têD & wêI –> .
Vet(X,y,t) & TEvid(Z,y,x,t) –> Max(R;w,c;-1(Z,I)) Inkl c;-1(X,I)

Når det gjelder reformuleringen av EpC4 – EpC6 bemerkes det at man fremdeles kan bruke Definisjon 5.2 – 5.3 i §5 i forbindelse med T;A*. I lys av dette er det nærligende å foreslå følgende endringer av EpC4 og EpC5:

EpUC4 (LêEp(S;e) & X,Yê(2^W) &wêI) –>.
Me(DaG,L)(X,Y)‘w =1 <–> DefB;w(Rest(X,I),Rest(Y,I))

EpUC5 (Z,Xê(2^W) & y,têD & wêI) –>.
Vet(X,y,t,w) & TEvid(Z,y,t,w) –> DefB;w(Rest(X,I),Rest(Z,I))

Endelig må EpC6 forandres til:

EpUC6 (Xê(2^W) & y,têD & wêI) –>
(Vet(X,y,t,w) –> (EZ)(TEvid(Z,y,t,w) & Max(R;w, c;-1(Z,I))≠ø))

Dermed har vi definert de epsistemisk/doxastiske aksiomene i L;E*.

La oss foreta en oppsummering:
Vi kaller T;A* med språket utvidet til L;E* samt utvidet med alle nye instanser av replacement og utsondringsaksiomene i L;E* som nye ikke-logiske aksiomer for T;A*[L;E*]. T;A*[L;E*] utvidet med EpUA1 – EpUA17 som nye ikke-logiske aksiomer betegner vi med " T;A*[L;E*]–I". Utvides T;A*[L;E*]–I med EpUE1 og EpUE2 som nye ikke-logiske aksiomer får man T;A*[L;E*]–II. Utvides denne teorien med EpUB1 – EpUB4 kaller vi resultatet for " T;A*[L;E*]–III". Utvides tilslutt T;A*[L;E*]–III med de epistemisk/doxasitiske akiomene EpUC1 – EpUC6 betegnes resulatet med " T;A*[L;E*]–IV". Det er opplagt at sekvensen av teorier T;A*[L;E*]–I,..., T;A*[L;E*]–IV løper helt

parallellt med den sekvensen som vi tidligere har betraktet, nemlig: T;A[L;E]–I,..., T;A[L;E]–IV.

Det bør nevnes at det følgende teorem bare kan bevises i T;A[L;E]–IV og ikke i T;A*[L;E*]–IV. Dette er selvfølgelig slik det skal være:

Teorem 6.1 Anta LêEp(S;e), F,GêFm(L) og x,têRgn(Var(L)). Da har man Val;L(S) om S er en av de følgend to formler:

(i) Nec(F<–>G) –> (Vet(x,t,F) <–> Vet(x,t,G))

(ii) Nec(F<–>G) –> (Tror(x,t,F) <–> Tror(x,t,G))

Vi overlater beviset for denne satsen til leseren.

§7 Om innholdet i resten av dette avsnittet.

I resten av dette avsnittet vil vi gjøre følgende: Først vil vi diskutere visse apekter ved enkelhetsrelasjonen mellom mulige verdener og i denne forbindelse drøfte mulighetene for å gi en mer detaljert analyse av denne. Dette vil bli gjort i de neste paragrafene. Dernest vil vi diskutere visse forhold i forbindelse med de evidensteoretiske aksiomene, og forøvrig våre andre aksiomer, med det for øye å forhindre visse misforståelser av dem. Dette skjer i §8. I §9 vil vi beskrive grunnlaget for en teori om induktive generaliseringer og kortfattet kommentere denne.

§7.1 Om muligheten av å gi en nøyere analyse av enkelhetsrelasjonen.

Ovenfor har det ikke blitt gitt noen genuin analyse av enkelhetsrelasjonen mellom de mulige verdenene. Det ville naturligvis ha vært interessant å ha væt i besittelse av en mer analytisk preget teori, muligens en teori som sa noe om hvordan enkelheten til en mulig verden w var avhengig av visse interne deler eller egenskaper ved den. I forbindelse med er mulig verden er det da kanskje naturlig å se på to aspekter: (i) Kompleksiteten til de individene som eksisterer i verdenen. (ii) Graden av kompleksitet til de sammenhenger som foreligger i verdenen. Det virker nokså nærliggende å tenke seg at kompleksiteten til en mulig verden avhenger av disse to faktorene. Vi tar oss den frihet på dette punkt å fremlegge noen helt uformelle og svært spekulative synspunkter i denne forbindelse.

La oss først tenke oss at vi innfører predikatet " y er kompleksitetsgraden til x". Det er naturlig å tenke seg at om x er en gjenstand med en bestemt kompleksitetsgrad så er denne komplekitetsgraden et reellt tall. Er derfor k funksjonen som betegnes av funktoren "kompleksitetsgraden til" så er k(x)êReell om xêDom(k). La oss betegne mengden av alle de sammenhenger som foreligger i en gitt verden w med S;w og la E være relasjonen "enklere enn" tatt helt generelt. Da har vi at (1) Enk = Rest(E,I) om vi forenkler litt og tenker oss at enkelhetsrelasjonen mellom mulige verdener, Enk, ikke er verdensrelativ. Det er nå ikke helt urimeligå forestille seg at:

(2) Pt(UN/wêI/(S;w)) Inkl Dom(k)

Dette innebærer at enhver mengde med sammenhenger har en viss kompleksitetsgrad. Naturligvis kan det også virke rimelig å anta at dersom x,yêPt(UN/wêI/(S;w)) så har man <x,y>êE hvis og bare hvis k(x)<k(y). Det interessante ville nå ha vært om man for hver xêPt(UN/wêI/(S;w)) kunne karakterisere k(x) på en eller annen opplysende måte, for eksempel i termer av k(y) der y Inkl x. Problemet virker imidlertid svært vanskelig og vi vil

ikke foreslå noen løsning, rett og slett fordi vi ikke har noen. Videre ville det ha vært av stor interesse om man kunne gitt en opplysende karakteristikk av relasjonen k({x}) < k({y}) om x,yêPt(UN/wêI/(S;w)). Kan man dette kan man også si noe informativt om når en sammenheng er enklere enn en annen.

Et prinsipp som det er nokså nærliggende å betrakte er dette:

(3) <x,y>êRest(E,I) <–> k(S;x) <k(S;y)

Hvis man derfor innfører en slik funsjon som k ville man indirekte kunne definere relasjonen Rest(E,I) om man kunne gi en definisjon av k eller i det minste kunne presentere et deduktivt sterkt og intuitivt sett plausibelt aksiomsett for denne funksjonen.

Når det gjelder (2) ovenfor kan det godt tenkes at denne er for sterk. Det er mulig å tenke seg at bare en delmengde J Inkl Pt(UN/wêI/(S;w)) er slik at
J Inkl Dom(k). Vi skal likevel holde fast ved (2) i det følgende.

Man kunne nå betrakte funksjonen G definert ved:

(4) G = Mg(<k(x),Mg(k(y): y Inkl x)>: xêPt(UN/wêI/(S;w)))

Det ville ha vært interessant om man kunne karakterisere denne funksjonen på en tilfredstillende måte, eller analysert deler av den. Fra (4) har man at
k(S;w) = G(Mg(k(x): x Inkl S;w)). Dette og (3) gir oss derfor:

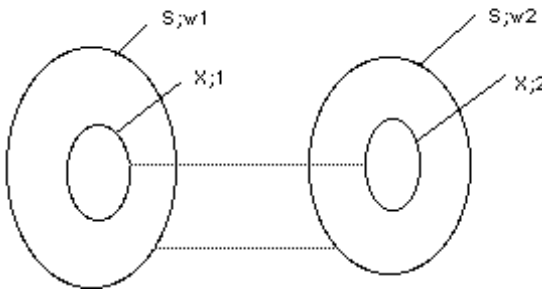
(5) <w1,w2>êRest(E,I) <–>
G(Mg(k(x): x Inkl S;w1))<G(Mg(k(x): x Inkl S;w2))

Hvis vi derfor kunne gi en detaljert definisjon av G og k, samt en tilfredstillende definisjon av S;w, ville vi ha kommet et langt steg videre i analysen av enkelhet. La meg igjen understreke at formålet med disse bemerkningene bare er å peke på visse faktorer som det kan være rimelig å ta hensyn til hvis man forsøker å analysere det enkelhetsbegrep vi har i tankene her. Videre er det klart at de begrepene som er involvert er uklare og problematiske og at våre betraktninger følgelig har et svært spekulativt preg.

Hvis man forsøker å karakterisere k ved lover som kunne tenkes å gjelde for den, hvilke lover kunne det da tenkes å dreie seg om?

Man kan betrakte den følgende figur:

Figur 7.1.1



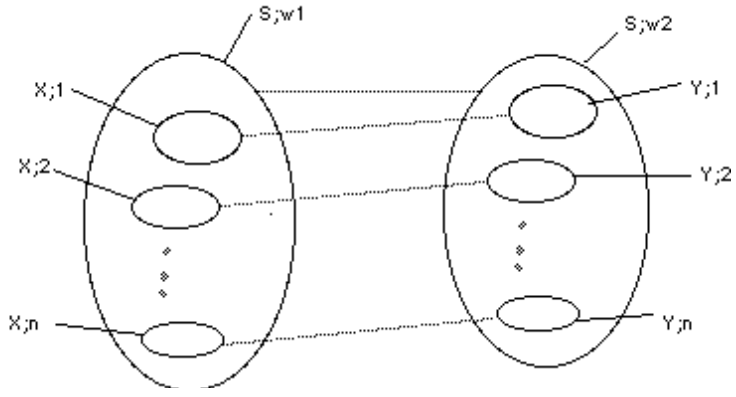
Punktene innenfor sirkelen S;w1 representerer alle sammenhengene i verdenen w1. Tilsvarende representerer punktene innenfor sirkelen S;w2 alle de sammenhenger som finnes i verdenen w2. X;1 er en ekte delmengde av S;w1 og X;2 er en ekte delmengde av S;w2. Antar man nå at k(S;w1–X;1) = k(S;w2–X;2) og at k(X;1)< k(X;2) synes det ved første øyekast ikke urimelig å si at kompleksitetsgraden til S;w1 burde være mindre enn den til

S;w2. Man kunne altså, om disse betraktningene har noe for seg, tenke seg å foreslå følgende prinsipp som et adekvanskrav til en eventuell definisjon av k:

(6) (X;1 Inkl S;w1 & X;2 Inkl S;w2 & k(S;w1–X;1) = k(S;w2–X;2) &
k(X;1)< k(X;2)) –> k(S;w1)< k(S;w2)

Et annet prinsipp som det er fristende og betrakte kan diagrammatisk representeres ved den følgende figur:

Figur 7.1.2



Vi antar at de diverse X;i'ene og Y;i'ene er disjunkte og at X;i'ne er strengt inkludert i S;w1 og at Y;i'ene er strengt inkludert i S;w2. Har man da at
k(S;w1– UN/i,1,n/(X;i)) = k(S;w2– UN/i,1,n/(Y;i)) og dessuten at
∑/i,1,n/(k(X;i)) < ∑/i,1,n/(k(Y;i)) så kunne det være nærliggende å tro at
k(S;w1) < k(S;w2). Man burde kanskje i denne forbindelse også forutsette at sammenhengsmengdene <X;i>/iê{1,..,n}/ og <Y;i>/iê{1,..,n}/ er uavhengige.

Et tredje prinsipp som kanskje også kunne virke tiltrekkende er det følgende: Anta <X;i>/iê{1,..,n}/, der nêN, er en uavhengig familie av ikke-tomme sammenhengsmengder som er innbyrdes disjunkte. Man kunne da kanskje kreve at

k(UN/i,1,n/(X;i)) = ∑/i,1,n/(k(X;i)).

Med andre ord kunne man kreve at dette meget enkle addisjonsprinsipp for kompleksitetsgrader gjelder for funksjonen k.

La oss nå tillate oss å gi en formalisert presentasjon av den i høyeste grad spekulative teori som vi har viklet oss inn i ovenfor. Vi betrakter de følgende nye primitive predikater:

(7.1.1) "x er en sammenheng som foreligger i verdenen w" "Sm(x,w)"
(7.1.2) "x er kompleksitetsgraden til y i verdenen w" "Cg;w(x,y)"

Vi tenker oss L;E utvidet med disse to nye predikatene. Teorien som vi har skissert ovenfor inneholder nå de følgende teoretiske prinsipper som vi formulerer nedenfor.

Først gir vi den følgende definisjon:

Definisjon 7.1.3 (i) S;w = Mg(x: Sm(x,w))
(ii) k;w = Mg(<y,x>: Cg;(x,y))

Som man ser relativiserer vi nå kompleksitetsgraden til et objekt til mulige verdener. Et prinsipp som mer eller mindre stilltiende ble forutsatt ovenfor kan nå formuleres slik:

En1 wêI & (Ey)(<x,y>êk;w) –> ((E!y)(<x,y>êk;w) & (iy)(<x,y>êk;w)êReell)

Dette prinsippet impliserer at k;w for hver w er en funksjon. Det neste prinsippet innebærer at alle mulige delmengder av UN/wêI/(S;w) er med i domenet til funksjonen k;w for alle verdener w:

En2 xêPt(UN/wêI/(S;w)) & wêI –> (E!y)(<y,x>êk;w)

Det neste aksiomet knytter enkelhetsrelasjonen i L;E til begrepene k;w og S;w:

En3 (i) x,yêI –> (<x,y>êR*;w <–> k;w(S;x) < k;w(S;y))
(ii) x,yêI –> (<x,y>ê~;w <–> k;w(S;x) = k;w(S;y))

Det er mulig å tilordne ethvert element x i UN/wêI/(S;w) et utsagn. Vi skal betegne det utsagnet som er tilordnet sammenhengen x med q(x). Formelt er dette definert slik:

Definisjon 7.1.4 q(x) = c(Mg(w: wêI &Sm(x,w)),I)

q(x) er altså det utsagnet som er sant i alle de verdenene der sammenhengen x foreligger.

Det er også selvfølgelig mulig å tilordne enhver mengde med sammenhenger et utsagn. Er X en mengde med sammenhenger betegner vi det utsagnet som er tilordnet X med "Q(X)". Formelt defineres "Q(X)" slik:

Definisjon 7.1.5 Q(X) = SNu(Mg(q(x): xêX))

Anta at X er en mengde med utsagn. Vi sier da at X er en uavhengig utsagnsmengde om den er konsistent og intet utsagn i mengden er noen logisk konekvens av de andre utsagnene i mengden. La oss i denne forbindelse minne om at en utsagnsmengde regnes som konsistent hvis og bare hvis det finnes en mulig verden der alle utsagnene i mengden er sanne. Videre sies et utsagn x å være en logisk konsekvens av utsagnene i mengden Y hvis og bare hvis det ikke finnes noen verden w hvor alle utsagnene i Y er sanne og hvor utsagnet x er usant. Vi bruker "Indep(X)" som forkortelse for "X er en uavhengig utsagnsmengde" og definerer dette predikatet formelt slik:

Definisjon 7.1.6 Indep(X) <–> (X Inkl (2^I) & Cons(X) &
(Ay)(yêX –> Cons((X–{y})U{Neg(y)})))

Videre definerer vi "Ua(X)" som betyr at X er en mengde med uavhengige sammenhenger slik:

Definisjon 7.1.7 Ua(X) <–> (X Inkl Pt(UN/wêI/(S;w)) & Indep(Mg(Q(x): xêX)))

Ua(X) betyr at X er en familie med sammenhengsmengder der de enkelte familie-medlemmene er uavhengige av hverandre. Det er mulig å definere et sterkere uavhengighetsbegrep for utsagnsmengder X. Vi skal si at en utsagnsmengde X er sterkt uavhengig, i symboler "SInd(X)", hvis og bare hvis man har for enhver delmengde Y av X at det finnes en mulig verden w hvor alle utsagnene i X–Y er sanne og alle dem i Y usanne. Formelt sett kan dette defineres slik:

Definisjon 7.1.8 SInd(X) <–> (X Inkl (2^I) & Cons(X) &
(AY)(Y Inkl X –> Cons((X–Y)U Neg"(Y))))

Tilsvarende kan man definere hva som menes med at en familie av sammenhengsmengder X er strengt uavhengig. Vi bruker "SUa(X)" som forkortelse for "X er en familie med sammenhengsmengder som er strengt uavhengige". Definisjonen er denne:

Definisjon 7.1.9 SUa(X) <–> (X Inkl Pt(UN/wêI/(S;w)) &
SInd(Mg(q(x): xêUN(X))))

De prinsippene som vi mer uformellt formulerte ovenfor kan nå formuleres slik innenfor den rammen vi har satt opp:

En4 [w,w1,w2êI & X;1 Inkl S;w1 & X;2 Inkl S;w2 &
k;w(S;w1 –X;1) = k;w(S;w2 – X;2) & k;w(X;1)<k;w(X;2)] –>
k;w(S;w1) < k;w(S;w2)

Addisjonsprinsippet som ble antydet kan formuleres slik:

En5 Cd(A)< Aleph;0 & (Ai)(iêA –> X;iêPt(UN/wêI/(S;w))) &
SUa(Mg(X;i: iêA)). –> k;w(UN/iêA/(X;i)) = ∑/iêA/(k;w(X;i))

Naturligvis er vi ytterst skeptiske til disse prinsippene. Imidlertid kunne det tross alt være av interesse å se litt nærmere på hva som følger fra dem innenfor rammen vi har lagt opp til. Det er også av interesse å se om de konsistent kan legges til T;A[L;E]–IV. Når det gjelder disse tesene bør det bemerkes at vi er spesielt mistenksomme når det gjelder En5.

Det vil føre for langt å diskutere denne teorien virkelig utførlig. Det som har blitt presentert ovenfor er utelukkende et utkast som kanskje kan stimulere til diskusjon. Vi har imidlertid tillatt oss å fremsette disse refleksjonene for ikke å tie ihjel et emne som både er svært vanskelig og svært viktig.

§8 Noen bemerkninger for å forhindre misforståelser av de evidensteoretiske og epsistemisk/doxastiske aksiomene.

For å unngå misforståelser av hva de evidensteoretiske og epistemiske aksiomene i T;E innebærer kan det være nyttig å komme med enkelte bemerkninger.

For det første må konstruksjonen "Evf(x,t,F)", som brukes som forkortelse for "Det er evident for x ved tidspunktet t at F", ikke tillegges samme betydning som uttrykket "At F er

tilfelle fortoner seg fullstendig selvinnlysende for x ved tidspunktet t", eller f.eks. samme betydning som konstruksjonen "Utsagnet at F virker fullstendig sikkert på x ved tidspunktet t". I denne sammenheng bør det understrekes at vi i forbindelse med T;E har i tankene et evidensbegrep som kan sies å ha en objektiv karakter. Det dreier seg altså ikke om et subjektivt begrep som har med følelse av sikkerhet å gjøre. En rekke utsagn kan fortone seg evidente for en person, og vedkommende kan selv mene at det er fullstendig sikkert at de er sanne, – kanskje sogar mene å vite med fullkommen sikkerhet at de er sanne –, men dette behøver likevel ikke å innebære at vedkommende kan ta dem for gitt, eller at de er evidente i den objektive betydning som det siktes til her. For at den betydningen til konstruksjonen "Evf(t,x,F)" som vi har i tankene skal komme tydeligere frem kan man f.eks. lese den slik: *"Det foreligger en situasjon som objektivt sett gjør det meningsløst for x ved tidspunktet t å betvile at F er tilfelle"*. Tar man utgangspunkt i denne lesemåten er det intet spesielt eiendommelig i å hevde at det kan være mulig Evf(x,t,F), men at det samtidig er er slik at x ved tidspunktet t er i tvil om F er tilfelle. Det at Evf(x,t,F) impliserer f.eks. ikke at x vet ved tidspunktet t at Evf(x,t,F). En annen ekvivalent lesemåte for konstruksjonen "Evf(x,t,F)" som kan bidra til å få klarere frem det betydningsinnhold som intenderes er den følgende: *"Det foreligger en situasjon som objektivt sett gjør det helt berettiget for x ved tidspunktet t å hevde at F helt sikkert er tilfelle"*. Vi oppfatter altså de to konstruksjonene som er satt i kursiv som ekvivalente. Den ene impliserer den andre og vise versa.

Lignende betraktninger kan gjøres i forbindelse med konstruksjonen "Ev(F)". Det ville være en grov misforståelse å tolke denne i retning av "Det fortoner seg opplagt for alle at F", "Det virker helt innlysende at F", eller på lignende måter. Også denne konstruksjonen tenkes i forbindelse med teorien T;E å uttrykke et objektivt preget evidensbegrep og bør heller leses slik: "Det foreligger en situasjon som objektivt sett gjør det meningsløst å betvile at F". En annen konstruksjon som kan brukes som en alternativ lesemåte er: "Det foreligger en situasjon som objektivt sett rettferdigjør en påstand om at det helt sikkert er tilfelle at F". Har man det evidensbegrepet som vi her har antydet i tankene når man studerer de evidensteoretiske aksiomene tror jeg det vil være lettere å finne dem akseptable.

La oss også, for å unngå misforståelser, bemerke at man ikke i noen av de teoriene vi har definert kan bevise at noen av de følgende formler er logiske sannheter i L om man forutsetter at LêEp(S;e), F,GêFm(L) og x,têRgn(Var((L);1):

(i)	Ev(F) –> (TEvt(t,G) –> BaG(Ev(F),G))
(ii)	Ev(F) –> (TEvf(x,t,G) –> BaG(Ev(F),G))
(iii)	Evf(x,t,F) & TEvf(x,t,G) –> BaG(Ev(F),G)
(iv)	Ev(F) –> (TEvt(t,G) –> BaG(Tror(x,t,F),G)
(v)	Ev(F) –> Vet(x,t,F)
(vi)	Vet(x,t,F) –> Ev(F)
(vii)	Ev(F) & Vet(x,t,F) –> Vet(x,t,Ev(F))
(viii)	Ev(F) & Tror(x,t,F) –> Tror(x,t,Ev(F))
(ix)	Evf(x,t,F) –> F
(x)	Ev(F) –> F
(xi)	Evf(x,t,F) –> Ev(Ev(x,t,F))
(xii)	Se(x,t,F) –> Ev(Se(x,t,F))
(xiii)	Ev(F) –> Ev(Ev(F))
(xiv)	Ev(Ev(F)) –> Ev(F)
(xv)	Ev(F) –> Nec(Ev(F))

Fra det som nettopp ble nevnt følger det f.eks. at det er mulig å gi et bevis for at lukningen av den følgende formel i L;E ikke er noe teorem i T;A[L;E]–IV:

H1 LêEp(S;e) & F,GêFm(L) & x,têRgn(Var((L);1) –>
Val;L(Ev(F) –> (TEvt(t,G) –> BaG(Ev(F),G)))

Helt tilsvarende påstander gjelder for de andre formlene som står på listen ovenfor. For å vise dette ville det være tilstrekkelig å spesifisere en modell M som validerer alle teoremene i T;A[L;E]–IV men der den universelle lukningen av H1 er usann. I prinsippet skulle det ikke være noe i veien for å konstruerer en slik modell M, men i lys av kompleksiteten til T;A[L;E]–IV må den nødvendigvis bli temmelig komplisert. Vi vil derfor ikke forsøke å gi noe strengt bevis for påstanden ovenfor. I Kapittel III vil vi imidlertid i detalj vise hvordan man kan løse en del problemer av denne typen.

Også de følgende formler er av en slik art at man ikke i T;A[L;E]–IV, eller i noen av de mer omfattende teoriene vi vil studere i dette kapitlet, kan bevise at de er logiske sannheter i L om man antar at LêEp(S;e), F,GêFm(L) og x,têRgn(Var((L);1):

(i) Vet(x,t,F) –> Evf(x,t,Vet(x,t,F))
(ii) Vet(x,t,F) –> Vet(x,t,Vet(x,t,F))
(iii) Tror(x,t,F) –> Evf(x,t,Tror(x,t,F))
(iv) Se(x,t,F) –> Evf(x,t,Se(x,t,F))
(v) Se(x,t,F) –> Tror(x,t,Se(x,t,F))
(vi) Se(x,t,F) –> Vet(x,t,Se(x,t,F))
(vii) Hø(x,t,F) –> Evf(x,t,Hø(x,t,F))
(viii) Hø(x,t,F) –> Tror(x,t,Hø(x,t,F))
(ix) Hø(x,t,F) –> Vet(x,t,Hø(x,t,F))
(x) Tror(x,t,Ev(F)) –> Evf(x,t,F)
(xi) Tror(x,t,Se(x,t,F)) –> Evf(x,t,F)
(xii) Vet(x,t,Se(x,t,F)) –> Evf(x,t,F)
(xiii) Evf(x,t,Ev(F))–> Evf(x,t,F)
(xiv) Vet(x,t,F) –> Evf(x,t,F)

De fleste av disse formlene virker mer eller mindre uplausible. Imidlertid synes det ikke å være noe logisk sett i veien for at man kan legge til et postulat til f. eks. T;A[L;E]–IV som sier at alle disse formlene er logiske sannheter i ethvert LêEp(S;e) om F,GêFm(L) og x,têRgn(Var((L);1). Hvis man ønsker dette kan man altså gjøre det uten at man direkte motsier seg selv.

§9 Induktive slutninger.

En induktiv slutning kan sies å være en slutning av typen:

(1) F(a;1) & ..... & F(a;n) / (Ax)F(x)

Siden ingen slutninger av denne typen strengt tatt er logisk gyldige bør man kanskje ikke bruke ordet "slutning" om dem. Man kunne i stedet forslå å omtale strukturer av typen ovenfor for induktive *generaliseringer*.

Formålet med denne paragrafen er å gi en forholdsvis generell definisjon av dette begrepet 'induktiv generalisering', samt foreslå en definisjon av av når en slik induktiv generalisering kan sies å være forsvarlig. Dette siste er naturligvis et kjerneproblem innenfor all såkalt "induktiv logikk".

Med en betingelse fortår vi en funksjon i klassen (2^I)^D. En formel definisjon kan formuleres slik:

Definisjon 9.1 Bet(x) <–> xê((2^I)^D)

"Bet(x)" leses "x er en betingelse". Vi definerer så hva som menes med "y er en instans av betingelsen x", i symboler "Inst(y,x)", ved:

Definisjon 9.2 Inst(y,x) <–> (Bet(x) & (Ez)(zêD & y = <x,z>))

Instanser av betingelser er altså ordnete par der den første komponenten er betingelsen selv og den andre komponenten et mulig individ som er et element i domenet til betingelsen. Vi definerer så generaliseringsfunksjonen G ved:

Definisjon 9.3 G = (ix)(xê((2^I)^((2^I)^D)) &
(Ay)(Aw)(yê((2^I)^D) & wêI –>
(x(y)‘w=1 <–> (Az)(zêD –> y(z)‘w =1))))

Uttrykket "x er en induktiv generalisering assosiert med betingelsen y", i symboler "IndG(x,y)", defineres ved:

Definisjon 9.4 IndG(x,y) <–> (Bet(y) &
(Ez)(z SInkl Mg(w: Inst(w,y)) & x= <G(y),z,y>))

Fra denne definisjonen fremgår det at x er en induktiv generalisering assosiert med betingelsen y hvis og bare hvis x er et triple der den første komponenten er generaliseringen av y – med andre ord det utsagnet som sier at y er oppfylt for alle mulige individer– den andre komponenten er en ekte delmengde av mengden av alle instanser av y, og den tredje komponenten er betingelsen y selv. En induktiv generalisering er en induktiv generalisering assosiert med en eller annen betingelse:

Definisjon 9.5 IG(x) <–> (Ey)(IndG(x,y))

Merk at hvis IG(x) er det intet som forhinderer at den andre komponenten i x kan være overtellbar. Det eneste som kreves er at den andre komponenten skal være strengt inkludert i mengden av instanser av betingelsen i generaliseringen. Anderledes formulert: (Mg(w: Inst(w,(x);3) – (x);2) ≠ø.

Vi innfører nå predikatet "x er en forsvarlig induktiv generalisering assosiert med betingelsen y relativt til teorien T og verdenen w", som vi forkorter med "FIndG(x,y,T,w)". Dette er formelt sett definert slik:

Definisjon 9.6 FIndG(x,y,T,w), x er en forsvarlig induktiv generalisering assosiert med betingelsen y relativt til teorien T og verdenen w hvis og bare hvis følgende betingelser er oppfyllt:

(i) IndG(x,y)
(ii) T Inkl (2^I)
(iii) wêI
(iv) Er A = Mg(c;-1(w,I): wêMg((s);1((s);2): sê(x);2)) og B= Mg(c;-1(x.I): xêT) kreves at Max(R;w, SN(AUB)) Inkl c;-1((x);1,I)

Som man ser er denne definisjonen nokså innfløkt. Imidlertid er poenget bak definisjonen temmelig "simple-minded" slik at den egentlig ser mer komplisert ut enn den egentlig er.

La oss kommentere de enkelte kravene. Det første kravet skulle åpenbart være rimelig: x må være en induktiv generalisering assosiert med betingelsen y. Det andre kravet innebærer at T er en mengde med utsagn. Dette er rimelig fordi vi nettopp med en teori forstår en samling av utsagn. Det tredje kravet skulle være opplagt. Det fjerde kravet er derimot mer ufordøyelig slik det står. Anta den induktive generaliseringen x er <G(y),b,y>. Da er (x);2 den andre komponenten i x og derfor en mengde av instanser av betingelsen y. Er nå s en slik instans har vi at s=<y,z> for noe mulig individ zêD. Siden yê((2^I)^D) må vi da ha at (s);1((s);2) = y(z)ê 2^I. Man ser derfor at Mg((s);1((s);2): sê(x);2) er en mengde med utsagn. Er x et utsagn så er c;-1(x,I) klassen av alle de verdnene der utsagnet x er sant. Vi kan kalle dette sannhetsmengden til utsagnet x. Det fremgår derfor at A er mengden av alle sannhetsmengdene til de ymse instanser som inngår i den andre komponenten til den induktive generaliseringen x. Tilsvarende er B mengden av sannhetsmengdene til de utsagn som inngår i teorien T. Snittet av alle mengdene i A og B representerer derfor mengden av alle de verdener der alle instansene av y i den induktive generaliseringen er sanne og samtidig alle utsagnene i T er sanne. Nå er (x);1 den første kom-ponenten i den induktive generaliseringen av x, mao. det utsagnet som sier at ethvert mulig individ oppfyller betingelsen y. c;-1((x);1,I) er da sannhets-mengden til dette utsagnet. At de R;w-maksimale elementene i snittet av AUB er inkludert i c;-1((x);1,I) innebærer da at utsagnet som sier at alle mulige individer som oppfyller betingelsen y bør aksepteres gitt at alle utsagnene i teorien T og alle instansene i den induktive generaliseringen er sanne.

Vi skal ikke utvikle denne teorien om induktive generaliseringer videre i dette arbeidet. Teorien er bare nevnt fordi vi har ønsket å antyde for leseren noen av de utviklingsmulighetene som ligger i vår teori om aksepterbarhet.

Avsnitt C

§1 Aksiomer i forbindelse med begrepet prøvbarhet.

Vi vil i dette avsnittet spesifisere de aksiomene som inngår i teorien E og som vi tidligere har omtalt som dens "prøvbarhetsteoretiske" aksiomer. Først er det imidlertid hensiktsmessig å innføre en del hjelpebegreper.

Negasjonen av utsagnet x, Neg(x), er det utsagnet som er usant i alle de verdener der utsagnet x er sant og sant i alle de verdener hvor x er usant. Det er definert på følgende måte:

Definisjon 1.1 Neg(x) = c(Mg(w: wêI & x(w)=1),I)

Den funksjonen som til ethvert utsagn x tilordner negasjonen av utsagnet betegner vi med "Neg". Den kan eksplisitt defineres ved Neg = ∂xê(2^I)(Neg(x)). Man ser derfor at Negê((2^I)^(2^I)). Det følgende teorem viser at Neg er en en-entydig funksjon:

Teorem 1.2 Neg: (2^I) –(1-1,på)–> (2^I)

Bevis: Det fremgår klart at av definisjonen av Neg at domenet til denne funksjonen er (2^I). Videre skulle det også være klart at den er på (2^I). For er yê(2^I) er det klart om vi setter x=Neg(y) at Neg(x)=y. Anta x,yê(2^I) og at x≠y. Da har man åpenbart at c:-1(x,I)≠c;-1(y,I). Dette impliserer at det finnes noe z der man enten har zêc:-1(x,I) & ¬(zêc;-1(y,I)) eller at ¬(zêc:-1(x,I)) & zêc;-1(y,I). I det første tilfellet har vi at ¬(zêc;-1(Neg(x),I)) og at zêc;-1(Neg(y)). Det følger at Neg(x)≠Neg(y). I det andre tilfelle resonnerer man på nøyaktig samme måte. Dette viser at Neg er en-entydig. **Q.E.D.**

Er X en utsagnsmengde er konsekvensmengden til X klassen av alle de utsagn som logik sett er implisert av utsagnene i X. Et utsagn y er logisk implisert av utsagnene i klassen X hvis og bare hvis snittet av sannhetsmengdene til utsagnene i X er inkludert i sannhetsmengden til y. Brukes derfor "k(X)" som forkortelse for "konsekvensmengden til X" kan denne funktoren defineres slik:

Definisjon 1.3 Anta X Inkl (2^I). Da setter vi:
k(X) = Mg(y: yê(2^I) & SN(c;-1(x,I): xêX) Inkl c;-1(y,I))

Vi minner om at predikatet "x er et utsagn som y ved tidspunktet t er i stand til å kontrollere riktigheten av i verdenen w" forkortes med "Kntr(x,y,t,w)". Man kan i denne forbindelse konsultere §1 i Avsnitt A i dette kapitlet. I det følgende vil vi som nevnt spesifisere de aksiomene i teorien E som inneholder dette predikatet. Det kan være passende å starte med:

EpD1 Kntr(x,y,t,w) –> (xê(2^I) & y,têD & wêI)

Som man ser virker denne formelen temmelig triviell og skulle knapt fortjene noen langtekkelige kommentarer. Setningen sier at dersom x er et utsagn som y ved tidspunktet t er istand til å kontrollere riktigheten av i verdenen w så er x et utsagn, y,t mulige individer og w en logisk mulig verden.

Vi definerer:

Definisjon 1.4(i) K;(t,w) = UN/yêD/(Mg(x: Kntr(x,y,t,w)))
(ii) K;(y,t,w) = Mg(x: Kntr(x,y,t,w)
(iii) K;t = K;(t,a;0)

I denne definisjon betegner "a;0" den aktuelle verden, dvs. den logisk mulige verden som faktisk foreligger realisert. Som man ser fra definisjonen er K;(y,t,w) mengden av alle de

utsagn som y er istand til å kontrollere riktigheten av ved tidspunktet t i verdenen w. K;(t,w) er mengden av alle de utsagn x som er slik at en eller annen er istand til å kontrollere riktigheten av x ved tidspunktet t i verdenen w. Sagt på en annen måte er K;(t,w) unionen av de diverse K;(y,t,w) ettersom y gjennomløper mengden av alle mulige individer D.

Vi innfører predikatet "Δ er en teori som i prinsippet kan prøves ved tidspunktet t i verdenen w" – dette forkortes "Prv,w(Δ,t)" – ved:

Definisjon 1.5 Prv;w(Δ,t) <–> (k(Δ)ΩK;(t,w))≠ø

Fra denne definisjonen fremgår det at Δ er en teori som i prinsippet kan prøves ved tidspunktet t i verdenen w hvis og bare hvis det finnes minst et utsagn som er med i konskvensmengden til Δ og som er slik at et eller annet individ er i stand til å kontrollere riktigheten av det ved tidspunktet t i verdenen w. Denne definisjonen synes å passe godt med hva man intuitivt vil være tilbøyelig til å legge i uttrykket "Prv;w(Δ,t)".

La oss så innføre begrepsparet "Prøvbarhetsgraden til teorien Δ1 er større enn den til teorien Δ2 relativt til tidspunktet t og verdenen w", i symboler "SPrv(Δ1,Δ2,t,w)" og "Prøvbarhetsgraden til teorien Δ1 er like stor som den til teorien Δ2 relativt til tidspunktet t og verdenen w", i symboler "LPrv(Δ1,Δ2,t,w)" ved den følgende definisjon:

Definisjon 1.6

(i) SPrv(Δ1,Δ2,t,w) <–>
Cd(k(Δ1)ΩK;(t,w))>Cd(k(Δ2)ΩK;(t,w))

(ii) LPrv(Δ1,Δ2,t,w) <–>
Cd(k(Δ1)ΩK;(t,w)) = Cd(k(Δ2)ΩK;(t,w))[11]

Den enkle ideen bak denne definisjonen er å la prøvbarhetsgraden til en teori Δ relativt til tidspunktet t og verdenen w rett og slett være kardinaltallet til klassen av de utsagn i konsekvensmengden til Δ som en eller annen er i stand til å kontrollere riktigheten av ved tidspunktet i verdenen w.

Det følgende aksiom som inngår i E er trolig litt mindre trivielt en EpD1:

EpD2 Kntr(x,y,t,w) –> Kntr(Neg(x),y,t,w)

Denne setningen uttrykker at dersom x er et utsagn som y kan kontrollere riktigheten av ved tidspunktet t i verdenen w så er også negasjonen av x et slikt utsagn.

Det neste aksiomet er dette:

EpD3 Kntr(x,y,t,w) –>
(Et')(t'êTp & <t,t'>êFør & (Ew;1)(w;1êI & Evid(x,y,t',w;1)) &
(Ew;1)(w;1êI & Evid(Neg(x),y,t',w;1)))

Ser man litt nøyere på denne formelen ser man at den sier at dersom x er et utsagn som y er i stand til å kontrollere ved tidspunktet t i verdenen w så må enten x eller Neg(x) være et utsagn som det er logisk mulig at er evident for y ved et eller annet tidspunkt t' som kommer etter t.

I det følgende har vi bruk for begrepet "komplett teori". En teori, dvs. en utsagnsmengde, kalles for komplett dersom den er konsistent og det gjelder for ethvert utsagn

11 Vi minner om at "Cd(X)" betyr det samme som "kardinaltallet til mengden X".

x at enten x selv eller negasjonen av x er en logisk konsekvens av utsagnene i Δ. "Komp(Δ)" brukes som forkortelse for "Δ er en komplett teori". Begrepet kan defineres slik:

Definisjon 1.7 Komp(Δ) <–>. Δ Inkl (2^I) &
¬(Ex)(xê(2^I) & xêk(Δ) & Neg(x)êk(Δ)) &
(Ax)(xê(2^I) –> (xêk(Δ) v Neg(x)êk(Δ)))

Ovenfor ble det innført et komparativt prøvbarhetsbegrep. La oss nå definere "Prøvbarhetsgraden til Δ relativt til t og w" samt "Prøvbarhetsgraden til Δ relativt til tidsintervallet [t,t'] i verdenen w":

Definisjon 1.8(i) GPr(Δ,t,w) = Cd(k(Δ)Ω K;(t,w))
(ii) GPrI(Δ,t;1,t;2,w) = Cd(k(Δ)Ω UN/tê[t;1,t;2]/(K;(t,w)))

La oss i denne forbindelse bemerke at uttrykket "[t;1,t;2]" som betegner tidsintervallet fra og med tidspunktet t;1 til og med tidspunktet t;2 formelt sett er definert slik:

Definisjon 1.9[t;1,t;2] = Mg(t: têTp &
(t=t;1 v t=t;2 v (<t;1,t>êFør &<t,t;2>êFør)))

Vi setter også:

Definisjon 1.10 TGPr(Δ,w) = Cd(k(Δ)ΩUN/têTp/(K;(t,w))

TGPr(Δ,w) kunne kalles den totale prøvbarhetsgraden til teorien Δ i verdenen w. Fra de definisjonene som er blitt gitt skulle det være klart at

(1) SPrv(Δ1,Δ2,t,w) <–> GPr(Δ1,t,w) > GPr(Δ2,t,w)
(1) LPrv(Δ1,Δ2,t,w) <–> GPr(Δ1,t,w) = GPr(Δ2,t,w)

La oss også i forbindelse med K;(t,w) bemerke at man har:

Teorem 1.11 K;(t,w) = Neg"K;(t,w)

Bevis: Dette er en umiddelbar konsekvens av EpD2. **Q.E.D.**

Det neste teoremet sier at dersom Δ1 og Δ2 er to komplette teorier, w en logisk mulig verden og t et tidspunkt så har man at prøvbarhetsgraden til Δ1 relativt til t og w er den samme som prøvbarhetsgraden til Δ2 relativt til t og w.

Teorem 1.12 têTp & wêI & Komp(Δ1) & Komp(Δ2) –>.
GPr(Δ,t,w) = GPr(Δ,t,w)

Bevis: Det vil være tilstrekkelig å bevise at det finnes en korrelasjon mellom k(Δ1)ΩK;(t,w) og k(Δ2)ΩK;(t,w). Vi vil konstruere en en-entydig avbildning g1 av k(Δ1)ΩK;(t,w) inn i k(Δ2)ΩK;(t,w), samt en en-entydig avbildning g2 av k(Δ2)ΩK;(t,w) inn i k(Δ1)ΩK;(t,w). Satsen følger da ved hjelp av Scrøder-Bernstein teoremet.

I lys av velordningsteoremet finnes det en enummerering s av k(Δ1)ΩK;(t,w) der Dom(s) Inkl On & (Ai)(Aj)(i,jêOn & i≠j –> s(i)≠s(j)). Vi definerer g1 ved å sette:

(a) g1(s(i)) = s(i) om s(i)êk(Δ2)

(b) g1(s(i)) = Neg(s(i)) om ¬(s(i)êk(Δ2)).

Dermed er g1 definert for alle xêk(Δ1)ΩK;(t,w). Nå kan man vise:

(1) g1 "(k(Δ1)ΩK;(t,w)) Inkl k(Δ2)ΩK;(t,w).

For anta for vilkårlig x at xêg1 "(k(Δ1)ΩK;(t,w)). Da finnes det iêDom(s) slik at x=g1(s(i)) & s(i)êk(Δ1)ΩK;(t,w). Er nå s(i)êk(Δ2) har vi i lys av (a) at x=s(i) og derfor xêk(Δ2)ΩK;(t,w). Er på den annen side ¬(s(i)êk(Δ2)) tilfelle har man at Neg(s(i))êk(Δ2) siden Δ2 er en komplett teori og s(i)ê(2^I). Siden s(i)êK;(t,w) har man i lys av Teorem 1.11 at Neg(s(i))êK;(t,w). Men da følger i lys av (b) at x=g1(s(i))= Neg(s(i))êk(Δ2)ΩK;(t,w). Dette viser at (1) holder.

La oss dernest vise at g1 er en-entydig. Anta for reduktio ad absurdum at det finnes x,y der (2) x,yêDom(g1) & x≠y & g1(x)=g1(y). Vi skiller mellom fire tilfeller:

Tilfelle (i): xêk(Δ2) & ¬(yêk(Δ2)). I lys av definisjonen av g1 har man da at x=g1(x) og g1(y) = Neg(y). Fra dette og (2) følger x=Neg(y). Men x,yêk(Δ1) og man har derfor y, Neg(y)êk(Δ1). Men dette strider mot forutsetningen om at Δ1 er konsistent siden det dreier seg om en komplett teori.

Tilfelle (ii): xêk(Δ2) & yêk(Δ2). I lys av definisjonen av g1 har man da at x=g1(x)=g1(y)=y. Men dette strider åpenbart mot (2). Dette tilfellet er derfor utelukket.

Tilfelle (iii): ¬(xêk(Δ2)) & yêk(Δ2). Da har vi igjen ved hjelp av definisjonen av g1 at g1(x)=Neg(x) og g1(y) =y. Fra dette og (2) følger y=Neg(x). Men siden x,yêk(Δ1) følger da x,Neg(x)êk(Δ1) som strider mot forutsetningen om at Δ1 er komplett og derfor konsistent.

Tilfelle (iv): ¬(xêk(Δ2)) & ¬(yêk(Δ2)). Fra definisjonen av g1 følger da at g(x) = Neg(x) = Neg(y)=g(y). Men fra dette og Teorem 1.2 følger at x=y. Dette strider mot (2) ovenfor.

Man ser at en motsigelse kan utledes i alle tilfellene. Dette innebærer at det umulig kan finnes x,y slik at (2) er tilfelle. I sin tur impliserer dette at g1 er en-entydig.

Man konstruerer nå g2 : k(Δ2)ΩK;(t,w) –> k(Δ1)ΩK;(t,w) helt analogt med g1. Man bare bytter om "Δ1" og "Δ2" i definisjonen ovenfor. Man kan så på samme måte som tilfellet var ved g1 bevise at g2 er en-entydig og at g2"(k(Δ2)ΩK;(t,w)) Inkl k(Δ1)ΩK;(t,w). Et bevis fremkommer om man bytter om Δ1 og Δ2 ovenfor og erstatter g1 med g2.

Dette avslutter beviset for Teorem 1.12. **Q.E.D.**

Vi gir den følgende definisjon av X er en mengde med innbyrdes uavhengige utsagn:

Definisjon 1.13 Uavh(X) <–> (X Inkl (2^I) & Cons(X) &
(Ay)(y Inkl X –> Cons((X–y)U Neg"y)))

Uttrykket "Uavh(X)" leses "X er en mengde med innbyrdes uavhengige utsagn". Som man ser fra definisjonen er det at Uavh(X) ekvivalent med å si at X er en konsistent utsagnsmengde og at hvis y er en vilkårlig delmengde av X så er den utsgnsmengden man får når man trekker y fra X og legger til negasjonene av utsagnene i y, altså (X–y)UMg(Neg(z): zêy), en konsistent utsagnsmengde. Det bør bemerkes at dette begrepet uavhengig utsagnsmengde er identisk med det vi tidligere i Avsnitt B, §7, Definisjon 7.1.8 omtalte som en strengt uavhengig utsagnsmengde. Man har altså at (AX)(Uavh(X) <–> SInd(X)).

I det følgende vil vi bruke uttrykkene "t","t'", "t;1", "t;2",... etc. som variabeltegn som utelukkende tar tidspuktersom verdier. Vi vil også innføre den konvensjon at "t'>t" skal bety

at tidspunktet t' kommer etter tidspunktet t, at "t'<t" skal bety at tidspunktet t' kommer før tidpunktet t. "t'≤t" og "t'≥t" innebærer henholdsvis at t' kommer før tidspunktet t eller er identisk med tids-punktet t og at tidspunktet t' kommer etter eller er identisk med tidspunktet t.

Vi definerer:

Definisjon 1.14 FK(t,w) = UN/t<t'/(K;(t',w)) – UN/t'≤t/(K;(t',w))

FK(t,w) er klassen av alle de utsagn som det er mulig for å kontrollere riktigheten av i verdenen w ved et eller annet tidspunkt som kommer etter tidspunktet t minus dem som det er mulig i verdenen w å kontrollere riktigheten til ved et eller annet tidspunkt inntil og medregnet t.

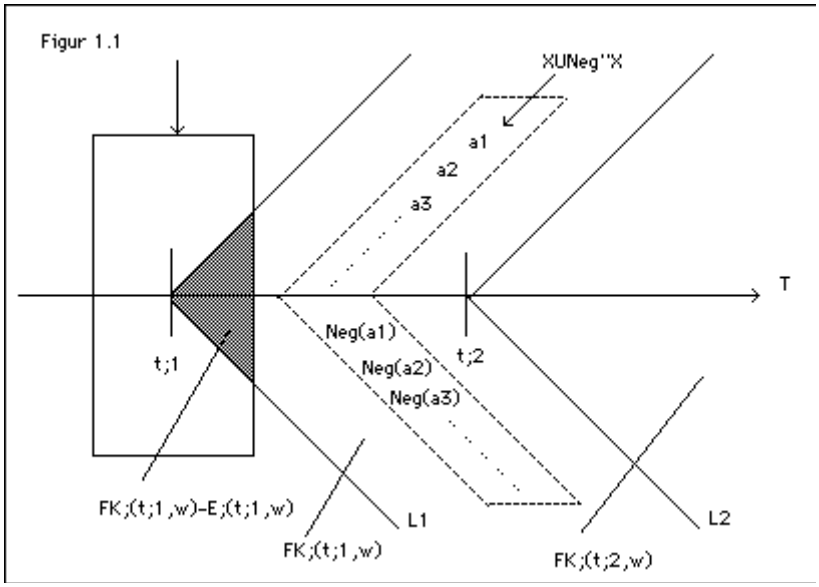
I det følgende vil vi se på en del hypoteser angående FK(t,w). I denne forbindelse er vi primært interessert i å se på hva disse hypotesene impliserer.
La oss først bemerke at vi definerer E;(t,w), mengden av alle de utsagn som er evidente for et eller annet mulig individ ved tidspunktet t i verdenen w, ved:

Definisjon 1.15 E;(t,w) = UN/yêD/(Mg(x:Evid(x,y,t,w)))

Den første hypotesen vi skal betrakte er denne:

H1 (At;1)(E;(t;1,w)≠ø –> (EX)(X Inkl (2^I) & Uavh(X) & Cd(X)≥Aleph;0 &
XUNeg"X Inkl (FK;(t;1,w) – (FK;(t;1,w)ΩE;(t;1,w))) &
(Et;2)(t;2>t;1 & XUNeg"X Inkl (FK;(t;1,w) – FK;(t;2,w)))))

For å få et inntrykk av hva H1 sier kan det være til en viss hjelp å betrakte figuren øverst på neste side, Figur 1.1. Firkanten merket E;(t;1,w) skal representere elementene i E;(t;1,w). Alle punktene til høyre for den brukkede linjen L1 representerer elementene i FK;(t;1,w). Punktene til høyre for den brukkede linjen L2 representerer elementene i FK;(t;2,w). Punktene på linjen T er ment å skulle representere tidspunkter. Figuren skulle ellers være temmelig selvforklarende. Naturligvis er den et rent uformelt hjelpemiddel.



La oss i forbindelse med H1 også betrakte den følgende hypotese:

H2 (i) xêFK;(t,w) & wêI –> c;-1(x,I)≠ø
(ii) X Inkl (FK;(t,w) – E;(t,w)) & wêI & Cons(X). –> Cons(XUE;(t,w))

Begge disse antagelsene kan virke fornuftige. Den første sier at dersom xêFK;(t,w) så er x et konsistent utsagn, mao. et utsagn som har en ikke-tom sannhetsmengde og som derfor er sant i en eller annen mulig verden. Den andre antagelsen i H2 sier at dersom X er en konsistent utsagnsmengde der alle utsagnene er blandt de som kan kontrolleres etter tidspunktet t i verdenen w, men ikke før t, og som ikke er blandt dem som er evidente ved t i w så er også XUE;(t,w) en konsistent utsagnsmengde. La oss i denne forbindelse bemerke at EpD1 – EpD3 naturligvis er så svake at de ikke kan brukes til å avgjøre H1 og H2. Aksepterer man språkrammen L;E virker ikke H1 og H2 helt urimelige.

Den følgende setning er en kaster noe lys over H1 og H2:

Teorem 1.16 (T;A[L;E]-IV) Anta H1 og H2 holder. Sett per definisjon:
C(t)= Mg(Δ: Komp(Δ) & (Et')(t'>t & GPr(Δ,t',w)≠ø & Cons(ΔUE;(t,w)))
Da gjelder:
(At)(E;(t,w) –> Cd(C(t))≥ 2^Aleph;0.

Vi overlater beviset for denne satsen til leseren som en øvelse.

Teorien som man får når T;A[L;E]–IV utvides med EpD1 – EpD3 kalles for T;A[L;E]–V.

Det neste teoremet er dette:

Teorem 1.17 (T;A[L;E]-V) Anta at de følgende betingelser holder:

(i) B;w(SNu(X),SNu(E;(t,w))[12]
(ii) X Inkl (2^I) & wêI
(iii) k(X)Ω(FK(t,w) – E;(t,w))≠ø

Da har man:

(Et;2)(t;2>t & (Ew')(w'êI & ¬B;w(SNu(X), SNu(E;(t;2,w')))))

Bevis: Fra den tredje forutsetningen følger eksistensen av yê(2^I) der:

(1) yêk(X)
(2) yê(FK(t,w) – E;(t,w))

Fra (2) følger ved hjelp av definisjonen av FK at det finnes t2 og z der:

(3) t2>t & Kntr(y,z,t2,w).

Fra dette og EpD3 følger eksistensen av t;2'>t;2 og w' slik at:

(4) Neg(y)êE;(t;2',w') & w'êI

Siden dette impliserer (Aw)(wêc;-1(SNu(E;(t,2',w'),I) –> y(w)=0) og siden man har:

Max(R;w', c;-1(SNu(E;(t,2',w'),I)) Inkl c;-1(SNu(E;(t,2',w'),I) følger at:

(5) (Aw)(wêMax(R;w', c;-1(SNu(E;(t,2',w'),I)) –> y(w)=0)

Nå har man at e;T(w',t;2') = SNu(E;(t,2',w'). Følgelig har man i lys av EpA8, EpA9 og EpA17 at:

Max(R;w', c;-1(SNu(E;(t,2',w'),I)) ≠ø

Det følger da at:

(6) ¬(Max(R;w', c;-1(SNu(E;(t,2',w'),I)) Inkl c;-1(SNu(X),I))

For var det motsatte tilfelle ville man i lys av (1) ha at:

Max(R;w', c;-1(SNu(E;(t,2',w'),I)) Inkl c,-1(y,I) som i lys av (5) impliserer at Max(R;w', c;-1(SNu(E;(t,2',w'),I)) =ø. Men dette er umulig. Siden t;2'>t;2>t &w'êI holder teoremet i lys av (6). **Q.E.D.**

Vi definerer "Δ er falsifisert ved tidspunktet t i verdenen w", i symboler "Fals(Δ,t,w)" ved:

Definisjon 1.18 Fals(Δ,t,w) <–> (Δ Inkl (2^I) & (Ey)(yêE;(t,w) &Neg(y)êk(Δ)))

Desuten definerer vi "Teorien Δ er prøvbar i tidsintervallet fra t;1 til t;2 i verdenen w", i symboler "Pr(Δ, t;1,t;2,w)" og "Teorien Δ er bare prøvbar i tidsintervallet fra t;1 til t;2 i verdenen w", i symboler "Prb(Δ,t;1,t;2,w)", ved:

Definisjon 1.19

(i) Pr(Δ, t;1,t;2,w) <–>. Δ Inkl (2^I) &
(Et)(t;1≤t≤t;2 & (k(Δ)ΩK;(t,w))≠ø)

(ii) Prb(Δ,t;1,t;2,w) <–>. Pr(Δ,t;1,t;2,w) &
(At)(t<t;1 –> (k(Δ)ΩK;(t,w))=ø) &
(At)(t>t;2 –> (k(Δ)ΩK;(t,w))=ø)

Det følgende teorem er et elementært korollar til disse definisjonene:

Teorem 1.20 Man har at følgende holder:

(i) X Inkl (2^I) & Prb(Δ,t;1,t;2,w) –> Pr(Δ,t;1,t;2,w)

---

12 Det bør bemerkes at "B;w(x,y)" er definert i Avsnitt B, §5, Definisjon 5.3.

(ii) X Inkl (2^I) & Prb(Δ,t;1,t;2,w) –>. (At)(t<t;1 –> ¬Pr(Δ,t,t,w)) &
(At)(t>t;2 –> ¬Pr(Δ,t,t,w))
(iii) X Inkl (2^I) & Prb(Δ,t,t,w) –> (Et)(Ew)(têTp & wêI & Fals(Δ,t,w))
(iv) Prb(Δ,t,t,w) –> GPr(Δ,t,w)≠0
(v) Pr(Δ,t,t,w) –> GPr(Δ,t,w)≠0

Bevis: Vi beviser bare punkt (iii) siden de andre punktene i satsen er trivelle konsekvenser av de definisjonene som har blitt gitt i denne paragrafen. Anta X Inkl (2^I) & Prb(Δ,t,t,w). Da har vi etter definisjonen av Prb at:

k(Δ)ΩK;(t,w)≠ø. Fra dette følger det at det må finnes noe y der (1) yêk(Δ) & yêK;(t,w). Fra det siste følger eksistensen av zder (2) Kntr(x,z,t,w). Fra dette og EpD3 følger at det finnes t'>t og w'êI der:

(3) Evid(Neg(y),z,t,w')

Men y = Neg(Neg(y)) og setter vi q=Neg(y) har man fra (1), (3) og (4):

(5) Neg(q)êk(Δ) & qêE;(t',w'). Dette og Definisjon 1.18 impliserer (Et)(Ew)(têTp & wêI & Fals(Δ,t,w)). **Q.E.D.**

Vi skal også gi et bevis for den følgende sats:

Teorem 1.21 Anta at de følgende betingelser holder:

(i) têTp^N & (An)(nêN –> t(n+1)>t(n))
(ii) E(w) = SN/n,0,∞/(c;-1(SNu(E;(t(n),w)),I)) & Cd(E(w))≥ Aleph;0
(iii) (An)(nêN & q=(c;-1(SNu(E;(t(n),w)),I) – c;-1(SNu(E;(t(n+1),w)),I))
–> Cd(q)≥Aleph;0)

Da gjelder:

(a) Er jêN og setter man
T(j,w) = Mg(x: x Inkl (2^I) & Cons(xU E;(t(j),w) &
¬Fals(X,t(j),w) & Fals(X,t(j+1),w))
så har man at Cd(T(j,w))≥Aleph;0
(b) Antar man at
(An)(nêN –> c;-1(SNu(E;(t(n+1),w)),I) Inkl c;-1(SNu(E;(t(n),w)),I))
og setter man
T2 = Mg(x: x Inkl (2^I) & Cons(x UE(w)) &
(Aj)(jêN –> ¬Fals(x, t(j),w)))
så gjelder det at Cd(T2) ≥ Aleph;0

Bevis: Ad (a): Anta forutsetningene (i) – (iii) holder. Anta videre at jêN og at T(j,w) er definert som angitt. Vi skal definere en en-entydig avbildning h der man har at Dom(h)= (c;-1(SNu(E;(t(j),w)),I) – c;-1(SNu(E;(t(j+1),w)),I)) og hvor verdiområdet til h er inkludert i T(j,w). Vi setter ganske enkelt:

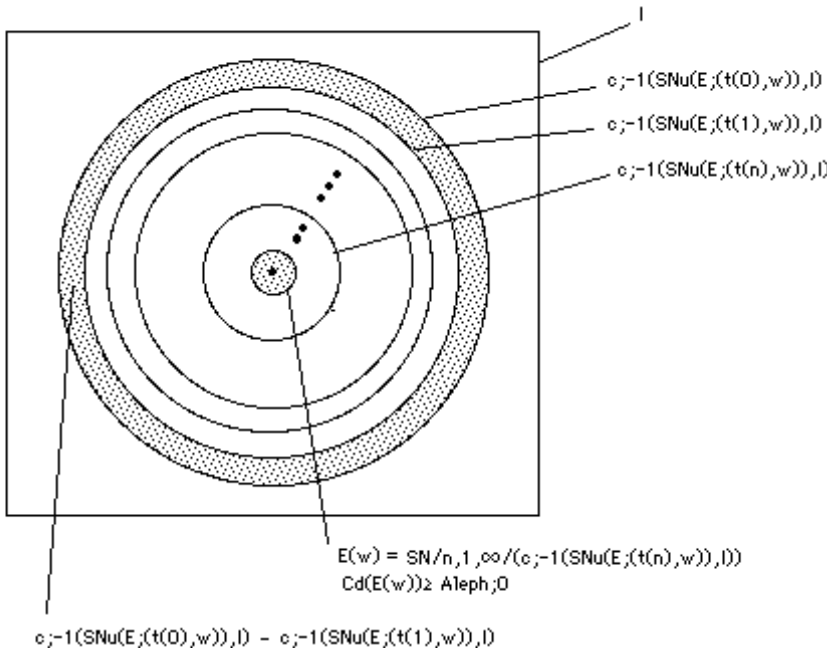
h(w') = Mg(x: x Inkl (2^I) & x(w')=1)

Det vil da være tilstrekkelig å vise følgende to ting:

(1) h er en-entydig
(2) h(w')êT(j,w) om w'ê(c;-1(SNu(E;(t(j),w)),I) – c;-1(SNu(E;(t(j+1),w)),I))

Den følgende figur viser situasjonen som er representert ved forutsetningene i teoremet ovenfor:

Figur 1.2



La oss først vise at (1) holder: Anta w;1,w;2êI og at w;1≠w;2. Da har man at c({w;1},I)≠ c({w;2},I). Anta for reduktio ad absurdum at h(w;1)=h(w;2). Siden c({w;1},I)êh(w;1) har man da at c({w;1},I)êh(w;2). Men dette impliserer i lys av definisjonen av h at c({w;1},I)(w;2)=1. Herav følger så w;1=w;2 som er umulig. Dette viser at (1) holder.

La oss dernest vise at (2) holder. Anta for vilkårlig w;0 at:
(+) w;0ê(c;-1(SNu(E;(t(j),w)),I) – c;-1(SNu(E;(t(j+1),w)),I)). Da har man w;0êc;-1(SNu(E;(t(j),w)),I) og derfor følgelig at:

(Ax)(xêE;(t(j),w) –> x(w;0)=1). Videre må man i lys av definisjonen av h ha at (Ax)(xêh(w;0) –> x(w;0)=1). Fra disse to forholdene følger:

(Ax)(xê E;(t(j),w) Uh(w;0) –> x(w;0)=1). Dette innebærer at
(3) Cons(E;(t(j),w) Uh(w;0)). Anta for reduktio ad absurdum at:

(4) Fals(h(w;0),t(j),w). Da følger ved hjelp av definisjonen av Fals at det finnes noe yê(2^I) der man har yêE;(t(j),w) & Neg(y)êk(h(w;0)). Men dette strider mot (3). Man har følgelig at (5) ¬Fals(h(w;0),t(j),w). Fra (+) har man at ¬(w;0êc;-1(SNu(E;(t(j+1),w)),I)). Dette impliserer at det finnes zê(2^I) der
(6) zêE;(t(j+1),w) & z(w;0)=0. Fra dette følger at Neg(z)(w;0)=1 og derfor at Neg(z)êh(w;0) Inkl k(h(w;0)). Dette og (6) impliserer Fals(h(w;0),t(j+1),w). Dermed har vi bevist at (2) holder.

Fra (1) og (2) og den tredje forutsetningen i satsen følger det vi ønsker, nemlig at (Aj)(jêN –> Cd(T(j,w))≥ Aleph;0.

Ad (b): Vi definerer h på samme måte som ovenfor. Da er h en-entydig. Man kan så lett vise at

(Aw')(w'êE(w) –> Cons(h(w')UE(w)) & (Aj)(jêN –> ¬Fals(h(w'),t(j),w)). Punkt (b) følger fra dette. **Q.E.D.**

§2 Et svakere prøvbarhetsbegrep.

Ovenfor har vi presisert "prøvbar teori" i retning av utsagnsmengde som impliserer minst et kontrollerbart utsagn". Dette er bare en blandt flere mulige presiseringer som synes å være til en viss grad rimelige. Man kunne også ha innført et litt svakere begrep "Teorien Δ er svakt prøvbar ved tidspunktet t i verdenen w", i symboler "Pr–(Δ,t,w)", og definert dette ved:

Definisjon 2.1 Pr–(Δ,t,w) <–> (Δ Inkl (2^I) &
(EX)(X Inkl (2^I) & (Ay)(yêX –> yêK;(t,w)) & ¬ Cons(XUΔ)))

Mao. er en teori prøvbar i denne svake betydningen relativt til t og w hvis og bare hvis den er uforenelig med en mengde utsagn som er kontrollerbare relativt til t og w. Man har nå åpenbart at GPr(Δ,t,w)>0 –> Pr–(Δ,t,w), men det omvendte behøver ikke å holde. I alle fall er det neppe noe man kan bevise i T;A[L;E]–V.
Derimot kan man bevise:

Teorem 2.2 wêI & têTp & (AX)(x Inkl K;(t,w) –> SNu(X)êK;(t,w)) –> .
GPr(Δ,t,w)>0 <–> Pr–(Δ,t,w)

Det detaljerte beviset for dette overlates til leseren. Under forutsetningen wêI & têTp & (AX)(x Inkl K;(t,w) –> SNu(X)êK;(t,w)) faller altså de to prøvbarhetsbegrepene sammen. Det synes imidlertid som om denne forutsetningen er heller tvilsom. Det mest fornuftige synes derfor å holde disse to begrepene fra hverandre.

§3 Andre mulige prøvbarhetsbegreper.

Det kan også være av interesse å antyde ganske kortfattet noen andre mulige presiseringsretninger av "prøvbar teori" som muligens kan gi opphav til interessante refleksjoner.

La oss definere "Teorien Δ er prøvbar ved tidspunktet t i verdenen w relativt til evidensmengden ∏", i symboler " Prb(Δ,t,w,∏)" ved:

Definisjon 3.1 Prb(Δ,t,w,∏) <–>. Δ Inkl (2^I) & ∏ Inkl (2^I) & wêI & têTp & (EX)
(X Inkl K;(t,w) & B;w(Neg(SNu(Δ)), Snu(∏UNeg"X)))

La oss kalle en teori Δ Inkl (2^I) for delvis uholdbar hvis og bare hvis et utsagn xêΔ er usant. Man ser lett at Δ er delvis uholdbar hvis og bare hvis Neg(SNu(Δ)) er holdbar. Definisjon 3.1 sier da at en teori er prøvbar ved tidspunktet t i verdenen w relativt til evidensmengden ∏ hvis og bare hvis det finnes en mengde med utsagn X der alle utsagnene kan kontrolleres ved t i verdenen w og man bør relativt til w akseptere at Δ er delvis uholdbar gitt at alle utsagnene i ΔUNeg"X er sanne.

Man kan nå naturligvis bevise:

Teorem 3.2 (T;A[L;E]–V) Pr(Δ,t,t,w) –> (AX)(X Inkl (2^I) –> Prb(Δ,t,w,X))

Dette viser at det sist innførte prøvbarhetsbegrep er minst like omfangsrikt som det som vi innførte ved Definisjon 1.19.

Man kan nå variere Definisjon 3.1 på forskjellige måter slik at forskjellige prøvbarhetsbegreper fremkommer. Man kunne eksempelvis betrakte det følgende begrep definert ved:

Definisjon 3.3 Prb;e(Δ,t,w) <–> Δ Inkl (2^I) & ∏ Inkl (2^I) & wêI & têTp & (EX)
(X Inkl (K;(t,w) – UN/t'≤t/(E;(t',w))) &
B;w(Neg(SNu(Δ)), Snu(UN/t'≤t/(E;(t',w)) UNeg"X)))

Imidlertid vil vi ikke her detaljert definere en slik familie av begreper og undersøke de logiske relasjonene mellom disse begrepene. De korte antydningene som er presentert ovenfor får være tilstrekkelige.

§4 Ultraintensjonale modifikasjoner av de prøvbarhetsteoretiske aksiomene.

Hvis man ønsker å arbeide med ultraintensjoner må en del av aksiomene i definisjonene som har blitt presentert ovenfor forandres. EpD1 forandres til:

EpUD1 Kntr(x,y,t,w) –> (xê(2^W) & y,têD & wêW)

Videre må EpD2 og EpD3 endres. Den nye versjonen av EpD2 kan formuleres slik:

EpUD2 Kntr(x,y,t,w) &wêI –> (Ez)(zê(2^W) &
Rest(z,I) = Neg(Rest(x,I)) & Kntr(z,y,t,w)

EpD3 kan endres til:

EpUD3 Kntr(x,y,t,w) &wêI –> (Et')(t'êTp & <t,t'>êFør &
(Ew;1)(w;1êI & (Ez)(zê(2^W) & Rest(z,I) = Neg(Rest(x,I)) & Evid(z,y,t',w;1)))
&(Ew;1)(w;1êI & Evid(x,y,t',w;1)))

Også endel av definisjonene må forandres. Definisjon 1.1 – 1.3 kan fortsatt brukes. Derimot forandrer man Definisjon 1.4 til:

Definisjon 4.1(i) K;(t,w) = UN/yêD/(Mg(Rest(x,I): Kntr(x,y,t,w)))
(ii) K;(y,t,w) = Mg(Rest(x,I): Kntr(x,y,t,w)
(iii) K;t = K;(t,a;0)

Definisjon 1.5 – 1.14 trenger ikke å forandres. Derimot synes det mer fordelaktig å bruke følgende definisjon i stedet for Definisjon 1.15:

Definisjon 4.2 E;(t,w) = UN/yêD/(Mg(Rest(x,I):Evid(x,y,t,w)))

Bortsett fra disse forandringene kan alle definisjonene i §1 overtas uten forandringer. De teoremene som har blitt bevist vil også fortsatt holde om de nye definisjonene brukes.

La oss nå foreta en oppsummering. Vi definerte i forrige avsnitt teorien T;A*[L;E*]–IV. Den teorien man får når EpUD1 – EpUD3 legges til denne som nye ikke logiske aksiomer kalles for T;A*[L;E*]–V.

Det bør også understrekes at vi å har fullført konstruksjonen av teorien E. Dette er nøyktig teorien T;A[L;E]–V, dvs. den teorien man får når man legger til EpD1 – EpD3 som nye ikke-logiske aksiomer til T;A[L;E]–IV. Man kan med andre ord definere:

Definisjon 4.3E = T;A[L;E]–V

I de to neste avsnittene, Avsnitt D og Avsnitt E, vil vi så fullføre beskrivelsen av de to, mer omfattende, teoriene E;1 og E;2.

Avsnitt D

§1 Bevisbegrepet.

Bevisbegrepet spiller naturligvis en stor rolle i all teoretisk preget tenkning. Det er derfor av vesentlig betydning å klargjøre det. I dette avsnittet vil vi foreslå en definisjon av predikatet "x er et bevis" som forekommer oss rimelig og som dessuten er tilstrekkelig generell for våre formål. Definisjonen er intendert som en tentativ eksplikasjon av uttrykket "bevis" slik det ofte brukes i teoretisk pregede diskusjoner. Siden uttrykket "bevis" i visse henseende er vagt og uklart er det mulig at det kan klargjøres på andre måter og at andre eksplikasjonsforslag enn det som presenteres her kan vise seg å være mer fruktbare.

Vi har tidligere definert predikatet " b er et bevis i det formale systemet S i språket L". Siden bevis i denne forstand er en art syntaktiske størrelser bør man holde dette bevisbegrepet adskilt fra det bevisbegrepet som vi her forsøker å eksplisere. I dette avsnittet oppfattes bevis som en type ekstraspråklige størrelser. Et og samme bevis kan uttrykkes i to forskjellige språk og innen et og samme språk kan det samme bevis i det minste i noen tilfelle tenkes representert på forskjellige måter. Videre er det mulig, slik bevisbegrepet oppfattes her, at det kan finnes bevis som overhodet ikke lar seg representere i noe vanlig språk, f.eks. semiformale eller formale intensjonale språk.

La oss presentere vårt eksplikasjonsforslag. Først trenger vi imidlertid en del hjelpebegreper som vi gir rigorøse definisjoner av.

Definisjon 1.1(a) x er et tre, i symboler "Tre(x)" hvis og bare hvis x er et triple <D,S,a> som oppfyller de følgende krav:

(i) aêD
(ii) S Inkl DXD
(iii) ¬(Ex)(xêD & <x,a>êS)

(iv) (Ay)(yêD & y≠a –> (E!z)(<z,y>êS))
(v) (Ay)(yêD –> (En)(nêN & (Func(f) & Dom(f) =n &
f(0)=a &f(n)= y & (Aj)(0≤j<n –> <f(j),f(j+1)>êS)))

(b) Er x et tre betegner (x);1 – (x);3 henholdsvis den første til tredje komponenten i treet. Den første komponenten i et tre kalles domenet i treet, den andre komponenten for etterfølger-relasjonen i treet. Endelig kalles den siste komponenten for rotpunktet eller bunnpunktet i treet.

(c) x er et endelig tre, i symboler "Tre;f(x)", hvis og bare hvis x er et tre og domenet i treet er en endelig mengde.

Et utsagnstre er et endelig tre der alle elementene i domenet i treet er tilordnet finstrukturerte utsagn, ultrautsagn, dvs. elementer i 2^W. Vi bruker "UTre(x)" som forkortelse for "x er et utsagnstre" og gir den følgende helt formelle definisjon.

Definisjon 1.2 UTre(x) <–> (Ex)(Ef)(x =<x,f> & Tre;f(x) &
Func(f) & Dom(f) =(x);1 & Rgn(f) Inkl (2^W))

Som man ser er et utsagnstre her definert som et ordnet par der den første komponenten er et endelig tre og den andre kompoenten er en funksjon som tilordner punktene i treet, dvs. elementene i den første komponenten, elementer i (2^W).

Definisjon 1.3 (a) Vi sier at x er et bunnpunkt i treet y, i symboler "BP(x,y)" hvis og bare hvis Tre(y) & y = (x);3. Siden ethvert tre y har et og bare et bunnpunkt bruker vi "Bp(y)" for dette bunnpunktet. (b) Et topp-punkt i et tre x er et punkt i treet som ikke har noe etterfølger punkt. Brukes "TP(y,x)" som forkortelse for "y er et topp-punkt i treet x" kan dette formelt defineres slik:

TP(y,x) <–>. Tre(x) & yê(x);1 & ¬(Ez)(zê(x);1 & <y,z>ê(x);2)

Vi setter π(x) = Mg(y: TP(y,x)). π(x) er følgelig mengden av alle topp-punkter i treet x

Vi definerer nå predikatet "Utsagnene i mengden Δ impliserer utsagnet x", i symboler "Imp(Δ,x)" ved:

Definisjon 1.4 Imp(Δ,u) <–> (Δ Inkl (2^W) & yê(2^W) &
(Aw)(wêI & (Az)(zêΔ –> z(w)=1). –> y(w)=1))

Vi definerer "x er et gyldig utsagnstre", i symboler "GUTre(x)", ved:

Definisjon 1.5 GUTre(x) <–> UTre(x) & Imp((x);2"π((x);1), (x);2(Bp((x);1)))

Vi setter G= Mg(x: GUTre(x)). G er følgelig mengden av alle gyldige utsagnstrær. Det er lett å vise at G er en mengde. Man har derfor:

Teorem 1.6 (Ey)((Ax)(xêy <–> GUTre(x)))

En n-ær utsagnstreoperasjon er en funksjon f hvor domenet til f er inkludert i G^n og hvor verdiområdet er inkludert i G. Det er med andre ord en funksjon som til alle sekvenser av lengde n av gyldige utsagnstrær i en viss klasse tilordner disse gyldige utsagnstrær. Vi

definerer "∏ er en n-ær utsagnstre-operasjon", "UTO(∏,n)", og "∏ er en utsagnstreoperasjon", "UTO(∏)", ved:

Teorem 1.7 (i) UTO(∏,n) <–>
(Func(∏) & Dom(∏) Inkl G^n & Rgn(∏) Inkl G)
(ii) UTO(∏) <–> (En)(nêN &UTO(∏,n))

Vi vil utvide språket L;E, som ble presist definert ved Definisjon 1.1 i §1 i Avsnitt A, med de følgende nye ikke-logiske predikater som vi betegner med (1.23) – (1.26) fordi de danner en forsettelse på listen i Avsnitt A, §1.

(1.23) "x er et utsagn som det er direkte evident at er en logisk konsekvens av utsagnene i mengden y i verdenen w" "E;d(x,y,w)"

(1.24) "x er et utsagn som det er evident at er en logisk konsekvens av utsagnene i mengden y i verdenen w" "E(x,y,w)"

(1.25) "∏ er en utsagnstreoperasjon som det er direkte evident at avbilder gyldige utsagnstrær på gyldige utsagnstrær i verdenen w" "EFunc;d(∏,w)"

(1.26) "∏ er en utsagnstreoperasjon som det er evident at avbilder gyldige utsagnstrær på gyldige utsagnstrær i verdenen w" "EFunc(∏,w)"

I det følgende skal vi i prinsippet arbeide innenfor rammen av språket L;E+ som er definert slik:

Definisjon 1.8L;E+ er det første-ordens språket som har som primitive ikke-logiske predikater (i) alle de ikke-logiske predikatene i L;E*, og (ii) predikatene (1.23) – (1.26) ovenfor.

Det følgende postulat skulle åpenbart kunne medgis om man medgir meningsfullheten til predikatene (1.23) – (1.26) og samtidig fastholder de definisjonene som tidligere har blitt gitt i denne paragrafen:

BEV 1 (i) E;d(x,y,w) –> (xê(2^W) & y Inkl (2^W) & wêW)
(ii) E(x,y,w) –> (xê(2^W) & y Inkl (2^W) & wêW)
(iii) EFunc;d(∏,w) –> UTO(∏) & wêW
(iv) EFunc(∏,w) –> UTO(∏) & wêW

Den følgende definisjon forklarer hva vi mener med et "evident utsagnstre":

Definisjon 1.9T =<t,f> er et evident utsagnstre i verdenen w hvis og bare hvis det er et utsagnstre som oppfyller de følgende krav:

(i) Er xê(t);1 og y =Mg(z: <x,z>ê(t);2) så har man at E;d(f(x), f"y,w) og at Imp(f"y, f(x))

Det er nå endelig mulig å presentere den eksplikasjonen av bevis som leseren ble lovet innledningsvis i denne paragrafen:

Definisjon 1.10 Med et bevis B i verdenen w forstår vi et ordnet par B = <t,F> som oppfyller de følgende krav:

(i) Tre;f(t)
(ii) Func(F) & Dom(f) =(t);1 & Rgn(F) Inkl Mg(x: UTre(x))
(iii) Er x et topp-punkt i treet t så er F(x) et evident utsagnstre.
(iv) Er x et punkt i treet t og y;1,...,y;n etterfølgerpunktene til x i treet t så finnes det en n-ær utsagnstre-operasjon ∏ som er slik at:
  (a) EFunc;d(∏,w)
  (c) F(x) = ∏(F(y;1),...,F(y;n))

Selvom definisjonen ovenfor gir et dekkende uttrykk for våre intensjoner kan det likevel ha en viss interesse å betrakte en alternativ definisjon. Denne er i det vesentlige ekvivalent med den som er gitt ovenfor:

Definisjon 1.11 Med et bevis B i verdenen w forstås et triple <t,G,F> der de enkelte komponentene oppfyller de følgende krav:

(i) t er et endelig tre
(ii) Func(F) & Dom(f) =(t);1 & Rgn(F) Inkl Mg(x: UTre(x))
(iii) Er x et topp-punkt i t så er F(x) et evident utsagnstre.
(iv) G er en funksjon der domenet er
  (t);1– Mg(z: zê(t);1 & ¬(Ey)(yê(t);1 & <z,y>ê(t);2)). Dette innebærer at domenet til G er punktene i treet t minus toppunktene. Rgn(G) er en mengde med utsagnstreoperasjoner.
(v) Er xê(t);1 og y;1,...,y;n etterfølgerpunktene til x i t så har man
  F(x) = G(x)(F(y;1),...,F(y;n))
(vi) (A∏)(∏êRgn(G) –> EFunc;d(∏,w)

Denne definisjonen adskiller seg fra Definisjon 1.10 ved at vi har bygd inn de evidente utagnstreoperasjonene i selve bevisstrukturen. Det er imidlertid klart at det er en nøye forbindelse mellom de to bevisbegrepene slik at de i alt vesentlig kan oppfattes som ekvivalente. Gitt et bevis i den første betydningen kan man alltid konstruere et bevis i den andre betydningen og omvendt.

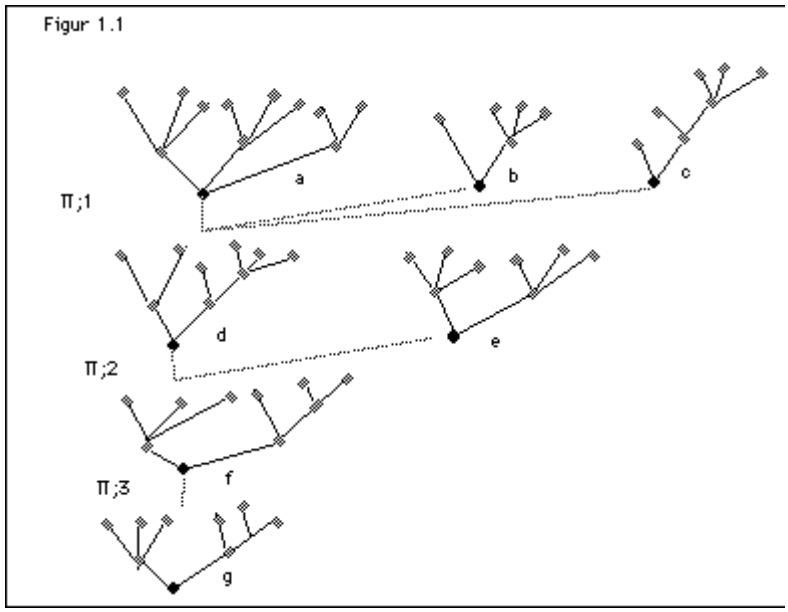
I det følgende brukes "b er et bevis i verdenen w" i betydningen angitt ved Definisjon 1.11. "Bevis(b,w)" forkorter "b er et bevis i verdenen w".

Vi forklarer tilslutt hva som her forstås med at b er et bevis for utsagnet x utfra premissene i mengden y i verdenen w. Dette skjer ved følgende definisjon:

Definisjon 1.12 Anta xê(2^W) og y Inkl (2^W). Da sies B = <t,G,F> å være et bevis for x utfra y i verdenen w, i symboler "BE;w(B,x,y)" hvis og bare hvis:

(i) B er et bevis i verdenen w
(ii) y er mengden av toppunkter i det utsagnstreet som F tilordner bunnpunktet i treet t og x er bunnpunktet i det utsagnstreet som F tilordner bunnpunktet i t.

Figuren nedenfor er ment som en illustrasjon til strukturen i et bevis B= <t,F,G>. Verdiområdet til G inneholder her de tre evidente utsagnstreoperasjonene ∏;1, ∏;2 og ∏;3. a – g er ment å skulle representere utsagnstrær.



Siden B er et bevis må de forskjellige trærene a, b, c, d, e, f og g være evidente utsagnstrær. Som man ser tilordner ∏;1 tuplet <a,b,c> treet d. Videre ser man at ∏;2(<d,e>) = f og at ∏;3(f) = g.

Vi vil ikke her utvikle den teorien om bevis som vi har skissert ovenfor videre. Teorien slik den er formulert er svært svak. Den må suppleres med flere antagelser, f. eks. generelle prinsipper som sier noe mer konkret om hvilke utsagnstre-operasjoner som er evidente, hvilke utsagnstrær som faktisk er evidente osv. Innenfor rammen av L;E+ skulle det være mulig å formulere en betraktelig mengde av slike prinsipper. Hovedformålet med dette avsnittet har imidlertid vært ganske beskjedent og i det vesentlige det følgende: Vi har ønsket å vise hvordan et bevisbegrep, og dermed en teori om bevis som harmonerer med teorien om mulige verdener, utsagn og finstrukturerte utsagn, kan konstrueres i forlengelsen av den rammen vi hovedsakelig har tegnet opp i denne avhandlingen. Vi har også ønsket å trekke frem en del av de begrepene som kan være relevante når man forsøker å analysere selve bevisbegrepet og ikke bare syntaktiske derivasjoner innenfor forskjellige klasser av formale systemer.

Avsnitt E

§1 Vitenskapelige lover.

I det følgende avsnitt ønsker vi å formulere en teori om universelle lovutsagn eller de vi kort vil omtale som "lover". Lover i denne betydning synes å være av fundamental betydning for forståelsen av vitenskapelige teorier og derfor av stor interesse i erkjennelsesteoretisk sammenheng. Imidlertid bør en teori om vitenskapelige lovutsagn sees i sammenheng med en rekke andre begreper. Det er nærliggende å tenke på årsaksbegrepet, forklaringsbegrepet, begrepet om kontrafaktiske kondisjonalutsagn og teoribegrepet mer generelt. Det virker rimelig å tro at det foreligger en rekke sammenhenger mellom disse begrepene og at man i en god teori om lover burde kunne gjøre disse sammenhengene eksplisitte slik at man lettere kan se konsekvensene av dem. I dette avsnittet vil vi derfor først formulere en temmelig generell teori om lovutsagn. Dernest vil vi sette denne teorien i sammenheng med en teori om kausalnødvendighet, en teori om kontrafaktiske utsagn, samt en teori om forklaringer.

§2 En teori om universelle lovutsagn.

Vi vil presentere teorien som en første-ordens teori. Språket til denne teorien er det første-ordens språket som resulterer når man til predikatene i L;A legger til de følgende nye ikke-logiske predikater:

(1.27)	"x er en lov"	"Lov(x)"
(1.28)	"x er en antesedentbetingelse i loven y"	"Ant(x,y)"
(1.29)	"x er en konsekventbetingelse i loven y"	"Kons(x,y)"
(1.30)	" x er en lov som gjelder i verdenen w"	"Sann:l(x,w)"
(1.31)	"y er en mulig verden som representerer et kausalt alternativ til verdenen w"	"R;c(w,y)"

Det bør bemerkes at denne listen med predikater er ment som en fortsettelse av listen (1.1) – (1.26) som ble oppført i Avsnitt A, §1 og Avsnitt D, §1 i dette kapitlet. Vi kaller første-ordens språket som fremkommer når man utvider L;E med (1.27) – (1.31) for L;F. Utvides L;E* med (1.27) – (1.31) kalles resultatet for L;F*.

I det følgende vil vi fremstille teorien fortløpende ved angi de formlene i L;F som er ikke-logiske aksiomer i den. Det vil skje i en forholdsvis naturlig rekkefølge, og hver formel vil ledsages med visse forklarende kommentarer. På denne måten skulle det være forholdsvis lett å danne seg et helhetsinntrykk av teorien.

§3 Aksiomene i teorien.

Teorien er tenkt som en enkel utvidelse av T;A. Alle aksiomer og definisjoner som ble gitt i forbindelse med T;A er derfor også aksiomer og definisjoner i denne utvidete teori. Den følgende fremstilling vil derfor være ubegripelig for den som ikke på forhånd er velkjent med T;A.

Det bør bemerkes at den betydningen vi har i tankene i forbindelse med predikatet "Lov(x)" også – og mer adekvat – kan uttrykkes ved den åpne setningen "x er et universelt ikke-probabilistisk kondisjonalutsagn av lovkarakter". Aksiomene som etterhvert vil bli

formulert kan etter vår mening oppfattes som forholdsvis plausible om "Lov(x)" tolkes på denne måten.

Teorien inneholder de følgende trivielle eksistensaksiomer:

LA1 (Ey)(Ax)(xêy <–> Lov(x))

Som man ser uttrykker denne formelen at klassen av alle lover er en mengde.

LA2 (i) (Ay)(Lov(y) –> (Ez)(Ax)(xêz <–> Ant(x,y)))
(ii) (Ay)(Lov(y) –> (Ez)(Ax)(xêz <–> Kons(x,y)))

Klassen av alle antesedentbetingelser i y og klassen av alle konsekventbetingelser i y er altså mengder om y er en lov. Dette er hva LA2 uttrykker.

Den følgende påstand virker også temmelig harmløs:

LA3 (Aw)(wêI –> (Ez)(Ax)(xêz <–> (Lov(x) & Sann;l(x,w))))

Denne formelen uttrykker at mengden av alle de lover som er sanne i en verden w eksisterer og at dette gjelder for enhver verden w.

Det neste aksiomet karakteriserer antesedent- og konsekventbetingelsene i en lov nøyere:

LA4 Lov(x) –> (En)(nêN & n≥1 &
(Az)(Ant(z,x) v Kons(z,x). –> zê((2^I)^(D^n))))

Som man ser uttrykker LA4 at dersom x er en lov så er enhver antesedent-betingelse i denne loven en egenskap, attributt, av grad n og at det samme gjelder for konsekventbetingelsene i loven. To distinkte antesedentbetingelser i en lov x kan altså ikke være attributter av forskjellig grad. Videre må det være slik at alle antesedentbetingelsene og konsekventbetingelsene i en og samme lov er egenskaper av samme grad.

Vi gir den følgende definisjon:

Definisjon 3.1(i) A;x = Mg(y: Ant(y,x))
(ii) K;x = Mg(y: Kons(y,x))

A;x er altså klassen av alle antesedentbetingelser i x og K;x er klassen av alle konsekvent betingelser i x. I lys av denne definisjonen kan LA2 og LA4 reformuleres på den følgende måte:

Teorem 3.2 (i) (Ay)(Lov(y) –> (M(A;y) & M(K;y))
(ii) (Ay)(Lov(y) –>
(En)(nêN & n≥1 & A;yUK;y Inkl (2^I)^(D^n)))

Det følgende aksiom fikserer sannhetsbetingelsene til predikatet Sann;l(x,y):

LA5 Lov(x) & A;xUK;x Inkl (2^I)^(D^n) & nêN & n≥1&wêI –>.
Sann;l(x,w) <–> (Ay)(yêD^n & (Az)(zêA;x –> z(y)‘w=1). –>

(Az)(zêK;x –> z(y)‘w=1))

Formelen uttrykker at en lov gjelder i verdenen w hvis og bare hvis ethvert n-tuple av mulige individer som oppfyller alle antesedentbetingelsene i verdenen w også oppfyller alle konsekventbetingelsene i w.

LA6 Lov(x) & Lov(y) –> (x=y <–> (A;x=A;y & K;x = K;y))

Dette prinsippet kunne omtales som et individuasjonsprinsipp for universelle lover. Det sier at to lover er identiske hvis og bare hvis de har nøyaktig samme antesedent- og konsekventbetingelser.

LA7 (Ax)(Lov(x) –> A;x ≠ø ≠ K;x)

Med andre ord har enhver lov minst en antesedentbetingelse og minst en konsekventbetingelse.

LA8 (Ax)(Lov(x) –> ¬(K;x Inkl A;x))

Dette prinsippet uttrykker at i en lov kan ikke mengden av konsekventbe-tingelsne være inkludert blandt antesedentbetingelsene. Også dette virker temmelig plausibelt.

Den neste formelen uttrykker også noe som skulle fortone seg ukontroversielt. Den sier at enhver universell lov har nøyaktig en og bare en konsekventbetingelse.:

LA9 (Ax)(Lov(x) –> (Ey)(K;x = {y}))

For å kunne formulere det neste aksiomet på en konsis måte innfører vi den følgende definisjon. Vi har tidligere definert "SNu(X)" når X er en mengde med utsagn. Vi skal tillate oss å bruke denne notasjonen også når X er en delmengde av klassen av n-ære attributter, ie. når X Inkl (2^I)^(D^n). Vi setter:

Definisjon 3.3 Anta X Inkl (2^I)^(D^n) der nêN og n≥1. Da setter vi:
SNu(X) = ∂xêD^n(c(Mg(w: (Ay)(yêX –> y(z)‘w =1)),I)

Man ser at denne definisjonen faller sammen med SNu definert for utsagn når n=0.

Det aksiomet vi nå har i tankene kan formuleres slik:

LA10 (Ax)(Ay)(Lov(x) & Lov(y) & A;x = A;y. –>.
(Ez)(Lov(z) & A;z = A;x & K;z = {SNu(K;xU K;y)}))

Det forkommer meg som om dette aksiomet er plausibelt. Har to lover nøyaktig de samme antesedentbetingelsene, men eventuelt forskjellige konsekventbe-tingelser, så bør det finnes en universell lov som har de samme antesedent-betingelsene, men der konsekventbetingelsen er snittet av de to tidligere konsekventbetingelsene.

Et prinsipp som i visse henseende ligner LA10 er dette:

LA11 (Ax)(Lov(x) –> (Ey)(Lov(y) & A;y = {SNu(A;x)} & K;y = K;x))

LA11 uttrykker at dersom x er en universell lov så finnes det en lov y som bare har en antesedentbetingelse og hvor denne er snittet av antesedentbetingelsene i x og hvor konsesekventbetingelsen i y er den samme som den i x.

LA12 (i) Lov(x) –> (Ay)(Az)(yêA;x & zêRgn(y) –> ¬(Aw)(wêI –> z(w)=1))

(ii) Lov(x) –> (Ay)(Az)(yêK;x & zêRgn(y) –> ¬(Aw)(wêI –> z(w)=1))

Er yê((2^I)^(D^n)) for noe n≥1, kaller vi elementene i Rgn(y) for instanser av attributtet y. Aksiom LA12 sier da at i en lov er ingen instanser av antesedent- eller konsekventbetingelsene utsagn som er sanne i alle mulige verdener.

LA13 Lov(x) –> (Az)(zêRgn(SNu(A;x)) –> ¬(Aw)(wêI –> z(w)=1))

La13 sier at det må være logisk mulig at enhver instans av snittet av antesedentbetingelsene i en lov er usann. Såvidt vi kan se kan LA13 ikke utledes fra det foregående aksiom selvom det suppleres med noen, eventuelt alle, av de andre prinsippene vi har nevnt så langt.

Det siste prinippet som betraktes her er det følgende som er analogt med LA13, men som angår konsekventbetingelsen i en universell lov:

LA14 Lov(x) –> (Az)(zêRgn(SNu(K;x)) –> ¬(Aw)(wêI –> z(w)=1))

Det er mulig at LA12 – LA14 er for sterke krav og at det er urimelig å kreve at alle lover skal oppfylle dem. Imidlertid synes det ikke som om disse aksiomene har noen direkte motintuitive konsekvenser i nærvær av de andre.

En lov som gjelder i alle logisk mulige verdener vi her bli kalt for en logisk lov. "L-Lov(x)" forkorter "x er en logisk lov":

Definisjon 3.4 L-Lov(x) <–> (Lov(x) & (Aw)(wêI –> Sann;l(x,w)))

I motsetning til universelle lover av logisk art definerer vi "x er en kausallov", i symboler "CLov(x)" slik:

Definisjon 3.5 CLov(x) <–> (Lov(x) & ¬L-Lov(x) & (Aw)(Sann;l(x,w) –> (Aw')(R;c(w,w') –> Sann;l(x,w'))))

En kausallov er med andre ord en lov som ikke er noen logisk lov og som dessuten er slik at hvis den gjelder i en eller annen verden w så gjelder den også i alle kausale alternativer til denne verdenen.

Tilslutt nevnes at to universelle lover kalles logisk ekvivalente om de er sanne i nøyaktig de samme logisk mulige verdenene. Vi bruker ~;L for å betegne denne ekvivalensrelasjonen og definerer:

Definisjon 3.6 ~;L = Mg(<x,y>: Lov(x) & Lov(y) & (Aw)(wêI –> (Sann;l(x,w) <–> Sann;l(y,w))))

~;L er åpenbart en ekvivalensrelasjon over feltet av universelle lover og oppdeler dette i ekvivalensklasser som er innbyrdes disjunkte.

I prinsippene LA1 – LA12 er det overhodet ikke nevnt språklige størrelser eller entiteter som har noen direkte tilknytning til språk. Klassen av mulige universelle lover kan derfor karakteriseres som en samling ekstraspråklige størrelser. Den kunne kanskje oppfattes som en grunnleggende ontologisk kategori i likhet med slike omfattende klasser som mangfoldet av mulige verdener, klassen av mulige individer, klassen av utsagn, klassen av alle mulige n-ære attributter, klassen av alle mengder etc.

Vi vil nå supplere denne abstrakte og generelle ontologiske del av vår teori med en teori om hvordan lover kan representeres eller uttrykkes i språk av forskjellig art. I denne forbindelse innskrenker vi oss til semiformale og formale intensjonale språk slik som disse to språkklassene ble definert i Del I av denne avhandlingen.

Det er nødvendig å innføre visse hjelpebegreper. Først defineres predikatet "s er et system av normale konnektiver for kvantifikasjosteori i språket L", "NQ(s,L)" slik:

Definisjon 3.7 NQ(s,L) holder hvis og bare hvis s og L oppfyller de følgende krav:

(i) SEMI;u(L) v FORM(L)
(ii) Seq(s) & Dom(s) = 4
(iii) s(0)êP;<1,0,1>((L);1) & s(1)êP;<0,0,2>((L);1)
(iv) s(2)êP;<0,0,2>((L);1) & s(0)êP;<0,0,1>((L);1)
(v) (Aw)(AX)(wêI & Xê((2^I)^D). –>
(Me(s(0),L)(X)‘w =1 <–> (Aa)(aêD –> X(a)‘w=1)))
(vi) (Aw)(AX)(AY)(wêI & X,Yê(2^I). –>
(Me(s(1),L)(X,Y)‘w =1 <–> X(w) =Y(w)=1)))
(vii) (Aw)(AX)(AY)(wêI & X,Yê(2^I). –>
(Me(s(2),L)(X,Y)‘w =1 <–> (X(w) =1 –>Y(w)=1)))
(vii) (Aw)(AX)(wêI & Xê(2^I). –>
(Me(s(3),L)(X)‘w =1 <–> X(w) =0))

Har man at ND(s,L) er s(0) en normal allkvantor i L, s(1) er en vanlig konjunksjonsoperator i L, s(2) en vanlig materiell implikasjonsoperator i L og endelig er s(3) et standard negasjonskonnektiv i L.

Vi definerer "L er et språk med vanlig kvantifikasjonsteori", i symboler "QLan(L)" ved:

Definisjon 3.8

(i) QLan(L) <–>. (SEMI;u(L) v FORM(L)) & (E!s)(NQ(s,L))
(ii) Har man QLan(L) & NQ(s,L) så setter vi :
(a) A;L = s(0)
(b) &;L = s(1)
(c) –>;L = s(2)
(d) ¬;L = s(3)

Vi sløyfer "L" i uttrykk av typen "–>;L" etc. når det er klart hvilket språk L det er som betraktes.

Den følgende presise definisjon kan nå gis av uttrykket "Formelen F representerer den universelle loven x i språket L" – "Rep(F,x,L)":

Definisjon 3.9 Vi sier at formelen F representerer den universelle loven x i språket L, Rep(F,x,L), hvis og bare hvis følgende krav er oppfylt:

(a) Lov(x) & QLan(L) & FêFm(L)

(b) Det finnes v, G;1,....,G;(n+1), x;1,...,x;m der n,m≥1 som oppfyller de følgende krav:

(i) G;1,....,G;(n+1)êFm(L)

(ii) x;1,....,x;mêRgn(Var((L);1) & VTO(v,L)

(iii) Variabeltegnene x;1,...,x;m er innbyrdes distinkte og i alle formlene G;1,...,G;(n+1) forekommer x;1,...,x;m som fri variabler og er de eneste variabeltegnene som forekommer fri.

(iv) A;x = Mg(Z(j) : jê{1,...,n}) der de diverse Z(j) er:
Z(j) = ∂a;1,...,a;mêD^m(Me(G;j,v(x;1,...,x;m/a;1,...,a;m),L))

(v) K;x = {Y} der
Y = ∂a;1,...,a;mêD^m(Me(G;(n+1),v(x;1,...,x;m/a;1,...,a;m),L))

(vi) F = (Ax;1)...(Ax;n)(G;1 & .... & G;n –> G;n+1)

Denne definisjonen er åpenbart temmelig komplisert. Men egentlig er ideen bak den ikke spesielt vanskelig å få tak i. Vi håper at leseren ved å studere definisjonen nærmere selv kan få tak i poenget.

En lov er representerbar i L hvis og bare hvis det finnes en formel i L som representerer den. Formelt sett kan dette defineres slik:

Definisjon 3.10 Rb(x,L) <–> (EF)(Rep(F,x,L)

Det er ikke bare, noe man ser fra Definisjon 3.9 ovenfor, lover som kan representeres i språk av den semiformale og formale typen. Også attributter kan representeres på denne måten. Vi definerer "Formelen F representerer det n-ære attributtet x i språket L", i symboler "RepA(F,x,n,L)", ved den følgende definisjon i det vi begrenser oss til språk med normal kvantifikasjosteori og som enten er formale eller semiformale og utvetydige.

Definisjon 3.11 Formelen F representerer det n-ære attributtet X i språket L, RepA(F,X,n,L) hvis og bare hvis

(a) Xê((2^I)^(D^n)) & QLan(L) & FêFm(L)

(b) Det finnes n, x;1,...,x;n,v som oppfyller de følgende krav:

(i) nêN & n≥1

(ii) x;1, ...,x;n êRgn(Var((L);1) og v er en verditilordning for L

(iii) x;1,...,x;n er distinkte variabler som forekommer fri i F og er de eneste variabeltegnene som forekommer fri i F.

(iv) X = ∂a;1,...,a;nêD^n(Me(F,v(x;1,...,x;n/a;1,...,a;n),L))

Vi har ovenfor snakket litt løst om instanser av attributter. På dette punkt kan det være passende å være mer eksplisitt og presis. La oss først minne om at det vi mener med et n-ært attributt, eller alternativt en n-ær egenskap, er ethvert element i funksjonsklassen (2^I)^(D^n). Er nå Xê((2^I)^(D^n)) vil domenet til X være klassen av alle mulige n-tupler av mulige individer, med andre ord mengden D^n. Verdiområdet til X vil være (2^I). Dette er mengden

av alle utsagn. De enkelte utsagnene som et n-ært attributt X tilordner de enkelte tuplene i D^n er det vi kaller for instansene til X. Brukes "Ins(y,x)" som forkortelse for "y er en instans av attributtet x" kan vi definere:

Definisjon 3.12 Ins(y,x) <–> (En(nêN & n≥1 & xê((2^I)^(D^n)) & yêRgn(x))

Terminologien her skyldes også det følgende forhold. Anta F er en formel som representerer det n-ære attributtet X i språket L. Anta v er en verditilordning for L, altså en funkjon som tilordner de enkelte variabeltegnene i L mulige individer, ie. elementer i D. Da har man, om vi forutsetter at ;1,...,x;n er distinkte variabeltegn som forekommer fri i F og de eneste slike som forekommer fri, at

X = ∂a;1,...,a;nêD^n(Me(F,v(x;1,...,x;n/a;1,...,a;n),L)).

Anta nå at a;1,...,a;n er mulige individer og at det i L er slik at c;1,...,c;n er n konstanter som er navn på henholdsvis a;1,...,a;n. Da kalles ofte

F;(x;1,....,x;n)[c;1,...,c;n] for en instans av F. I så fall er det naturlig å si at y = Me(F;(x;1,....,x;n)[c;1,...,c;n],L) = Me(F,v(x;1,...,x;n/a;1,...,a;n),L) er en instans av attributtet X.

Uttrykket "x representerer en instansiering av attributtene i klassen A" som forkortes "In(x,A)" defineres slik:

Definisjon 3.13 In(x,A) <–>
(En)(nêN & n≥1 & A Inkl ((2^I)^(D^n)) & Func(x) &
Dom(x) = A & (Ez)(zêD^n & (Ay)(yêA –> x(y) = y(z))))

En instansiering av attributtklassen A av n-ære attributter er derfor en funksjon med A som domene og som til ethvert attributt i A tilordner dette en instans med hensyn på et n-tuple zêD^n.

I tilknytning til denne definisjonen er det også naturlig å introdusere predikatet " x representerer en instansiering av attributtene i klassen A med hensyn på tuplet z", i symboler "In(x,A,z)" ved:

Definisjon 3.14 In(x,A,z) <–>
(En)(nêN & n≥1 &A Inkl ((2^I)^(D^n)) & Func(x) &
Dom(x) = A & zêD^n & (Ay)(yêA –> x(y) = y(z)))

Som man ser har man at In(x,A) <–> (Ez)(In(x,A,z)).

Vårt neste mål er å foreslå en eksplikasjon av hva som kan forstås ved at en universell lov virkelig er generell og gjelder ubestemt mange objekter. Hvis man tenker seg at en setning som (1) "Alle ravner er svarte" representerer en universell lov som gjelder i en verden w kan man si at klassen av ravner representerer en "åpen mengde": Det er logisk mulig å tenke seg at ravner skulle kunne eksistere i uendelig tid fremover og at vi aldri skulle kunne komme så langt at vi definitivt kan si at alle ravner nå har blitt undersøkt og at alle har blitt funnet å være svarte.

La oss først definere hva som menes med at alle utsagnene i en utsagnsmengde er strengt logisk uavhengige av hverandre. Vi har definert dette tidligere ved Definisjon 1.13 i §1 i Avsnitt C. La oss her gjenta definisjonen:

Definisjon 3.15 Uavh(X) <–> (X Inkl (2^I) & Cons(X) &
(Ay)(y Inkl X –> Cons((X–y)U Neg"y)))

Et attributt X kalles nå for strengt generelt hvis og bare hvis klassen av instanser av X inneholder en minst tellbart uendelig mengde med utsagn som er strengt uavhengig. Med andre ord skal klassen av instanser av X inneholde en utsagnsmengde Z der vi har Cd(Z)≥ Aleph;0 og Uavh(Z). Vi bruker "SGenA(x)" som forkortelse for "x er et strengt generelt attributt". Den formelle definisjonen er da:

Definisjon 3.16 SGen(x) <–> (En)(nêN & n≥1 & xê((2^I)^(D^n)) &
(Ea)(a Inkl Rgn(x) & Cd(a)≥Aleph;0 & Uavh(a)))

Man kunne nå foreslå å kalle en lov for strengt generell dersom snittet av antesedentbetingelsene i den er et strengt generelt attributt i denne forstand:

Definisjon 3.17 GLov(x) <–> (Lov(x) & SGen(SNu(A;x)))

Det er ikke opplagt at alle lover i kraft av å være lover nødvendigvis må være strengt generelle i denne forstand. Heller ikke er det opplagt at alle kausallover i betydningen ovenfor behøver å tilfredstille dette kravet. Det er mulig at man i Definisjon 3.16 kan svekke kravet Uavh(a) til at a bare skal være uavhengig i den svakere forstand at intet utsagn i denne mengden skal være logisk implisert av noen av de andre.

Når det gjelder uttrykket "generelt attributt" er dette også selvfølgelig uklart. Et mulig begrep "generelt attributt" er det vi har innført ved Definisjon 3.16. Men det er også mulig at man kan presisere dette i retning av " et attributt som har en ekstensjon i en eller annen mulig verden som inneholder minst tellbart uendelig mange elementer". Bruker vi "S*Gen(x)" for å betegne dette begrep kan man definere:

Definisjon 3.18 S*Gen(x) <–> (En)(nêN & n≥1 & xê((2^I)^(D^n)) &
(Ew)(wêI & Cd(Mg(z: zêDom(x) & x(z)‘w =1))≥Aleph;0))

Man kunne så innføre et annet begrep 'generell lov' ved:

Definisjon 3.19 G*Lov(x) <–> (Lov(x) & S*Gen(SNu(A;x)))

I forbindelse med Definisjon 3.16 – 3.19 bør man bemerke at vi har at SGen(x) impliserer at S*Gen(x). Leseren kan selv verifisere denne påstanden. Det følger derfor at (Ax)(GLov(x) – > G*Lov(x)). Enhver lov som er strengt generell i den første betydningen må være strengt generell i den andre betydingen. Det omvendte behøver naturligvis ikke å holde.

Prinsippene LA1 – L14, som ble gjennomgått ovenfor, er ikke nødvendigvis de eneste prinsippene om lover som kan komme på tale når man arbeider innenfor den språkrammen som vi har satt opp her. Også noen andre prinsipper som muligens er plausible kan fortjene en viss oppmerksomhet i tillegg til disse som vi allerede har nevnt.

Det er intet i teorien slik den er presentert så langt som impliserer at lover er utsagn. Derimot kan man til enhver lov x tilordne et bestemt utsagn, nemlig det utsagnet som er sant i

nøyaktig de og bare de verdenene hvor loven x gjelder. Vi betegner dette utsagnet med l(x) og definerer:

Definisjon 3.20 l(x) = c(Mg(w: wêI & Sann;l(x,w)),I)

l er altså en operasjon som tilordner enhver lov et utsagn. I det følgende vil vi si at et utsagn x representerer loven y om man har at x=l(y). Holder x=l(y), der y er en lov, vil vi også si at y kan representeres ved utsagnet x. Merk at man har:

(Ax)(Ay)(Lov(x) &Lov(y) –> l(x) = l(y) <–> <x,y>ê~;L).

Dette innebærer at to lover som er distinkte, men ekvivalente, kan representeres ved det samme utsagn. Dette impliserer i sin tur at lover kan være finere individuert enn utsagn i vår betydning.

La oss nå se på to nye prinsipper om lover som ikke har blitt omtalt. Det første aksiomet er dette:

LA15 Lov(x) –> ¬(Ey)(Lov(y) & l(y)êRgn((iz)(zêK;x)))

Denne setningen uttrykker at ingen instans av konsekventbetingelsen i en lov selv kan være et utsagn som representerer noen lov.

Et tilsvarende påstand kan formuleres for antesedentbetingelsene i en lov:

LA16 Lov(x) –> ¬(Ey)(Lov(y) & (Ez)(zêA;x & l(y)êRgn(z)))

Med andre ord kan ingen instans av noen av antesedentbetingelsene i en lov være noe utsagn som representerer en lov.

Umiddelbart kan LA15 og LA16 fortone seg plausible. Det er vanskelig å se at det skulle finnes noen sterke argumenter mot dem om man aksepterer den språkrammen som vi arbeider innenfor her. Man kan også bemerke at LA15 og LA16 i likhet med de andre aksiomene vi har nevnt ikke inneholder noen referanser til språk. De kan derfor sies å være av en "ontologisk" natur.

La oss nå gi en sammenfattende beskrivelse av den teorien vi har nådd frem til. Vi kaller språket L;E utvidet med predikatene (1.27) – (1.31) i §1 for L;F. La oss betegne teorien som fremkommer når T;A[L;E]–V i Avsnitt C, §4 utvides til L;F og man legger til alle instanser av replacement og utsondringsaksiomet i L;F, for T;A[L;F]–V. Den teorien som så oppstår når man så legger til LA1 – LA16 i denne paragrafen kalles for T;A[L;F]–VI.

Ønsker man å arbeide med ultraintensjonale entiteter må man arbeide innenfor rammen av T;A*[L;F*] –VI som fremkommer ved å utvide språket til T;A*[L;E*] –V til L;F*, og dernest legge til alle nye instanser av replacement-aksiomet og utsondringsaksiomet i L;F* samt aksiomene LA1 – LA16.

Helt tilslutt i denne paragrafen vil vi anføre noen enkle korollarer til aksiomene LA1 – LA16. Vi starter med:

Teorem 3.21 (Ax)(Lov(x) –> K;xΩA;x =ø)

Bevis: Man benytter LA8 og LA9. **Q.E.D.**

Det er også nokså lett å bevise den følgende setning:

Teorem 3.22 Anta det finnes x, y, v og z som oppfyller de følgende krav:
(i) Lov(x) & Lov(y) & Sann;l(x,w) & Sann;l(y,w)
(ii) <A;x,K;x> = <{v},{z}> = <K;y,A;y>
Da gjelder:
¬(Ax)(Ay)((Lov(x) & Lov(y) & Sann;l(x,w) & Sann;l(y,w) & K;x Inkl A;y) –>
(Ez)(Lov(z) & Sann;l(z,w) & A;z = A;xU(A;y–K;x) & K;z= K;y))

Vi overlater beviset for denne setningen som en øvelse til leseren.
La oss definere:

Definisjon 3.23 Sm(z,x,y) <–> (Lov(z) & Lov(x) & Lov(y) &
K;x Inkl A;y & A;z = A;xU(A;y–K;x) & K;z= K;y)

"Sm(z,x,y)" kan leses "z er sammensetningen av loven x og loven y". Når det gjelder denne definisjonen har man:

Teorem 3.24 (Ez)(Sm(z,x,y)) –> (E!z)(Sm(z,x,y))

Bevis: Setningen følger nokså umiddelbart fra Definisjon 3.23 samt LA6, identitetsprinsippet for lover. **Q.E.D.**

Definisjon 3.25 ClSm(X) <–>. (Ay)(yêX –> Lov(y)) &
(Az)(Aw)(z,wêX & K;z Inkl A;w –> (Ev)(vêX & Sm(v,z,w)))

ClSm(X) innebærer med andre ord at X er en mengde med lover som er lukket under sammensetningsoperasjonen Sm.

Ved hjelp av Definisjon 3.23 og Definisjon 3.25 kan Teorem 3.22 reformuleres på følgende mer kompakte måte:

Teorem 3.26 Anta det finnes x, y, v og z som oppfyller de følgende krav:
(i) Lov(x) & Lov(y) & Sann;l(x,w) & Sann;l(y,w)
(ii) <A;x,K;x> = <{v},{z}> = <K;y,A;y>
Da gjelder:
¬ClSm(Mg(x: Lov(x) & Sann;l(x,w))

Igjen overlater vi beviset for denne påstanden som en øvelse til leseren.

Vårt neste mål er å sette den teorien om lover som vi nå har presentert i sammenheng med en teori om kontrafaktiske betingelsesutsagn og en teori om forklaring. Vi tar opp disse to temaene i resten av dette avsnittet.

§4 Kontrafaktiske betingelsesutsagn.

Det har blitt argumentert for tidligere, og da særlig av Nelson Goodman[13] at det er en intim sammenheng av begrepsmessig natur mellom på den ene side det Goodman kaller for "lawlike sentences" og på den annen side det som vanligvis kalles kontrafaktiske betinglsesutsagn (counterfactuals).[14] Vi vil nå forsøke å klargjøre disse sammenhengene på en presis måte innenfor en begrepsramme som er litt mer omfattende enn den vi arbeidet med i forrige paragraf. Det bør understrekes at vårt begrep om setninger i formale og semiformalt utvetydige språk som representerer lover synes å være svært nært beslektet med Goodmans "lawlike sentences", og at vårt begrep kanskje kunne oppfattes som en eksplikasjon av det han har i tankene, selvom vår begrepsramme synes fullstendig uakseptabel for ham.

For at sammenhengene skal fremstå så tydelig som mulig vil vi først gi en fremstilling av en teori om kontrafaktiske betingelsesutsagn. Denne teorien er i alt vesentlig hentet fra David Lewis. Man bør konsultere Lewis [1] for en mer utførlig fremstilling enn den som vi gir her.

La oss først utvide predikatlisten (1.27) – (1.31) i §2 med de følgende nye ikke-logiske predikater:

(1.32) "Hvis det forholdet utsagnet x beskriver hadde vært tilfelle i verdenen w ville også det forholdet som beskrives av utsagnet y vært tilfelle" "Cf(x,y,w)"

(1.33) "x er mengden av alle de logisk mulige verdenene som er tilstrekkelig like verdenen w" "TLik(x,w)"

(1.34) "Verdenen x ligner minst like mye på verdenen y som verdenen z" "Sim;y(x,z)"

Vi kaller det første-ordens språket som fremkommer når (1.32) – (1.34) legges til L;F som nye ikke-logiske predikater for L;G. Tilsvarende kalles det språket som fremkommer når L;F* utvides med (1.32) – (1.34) for L;G*. I denne paragrafen vil ikke noen andre språk bli tatt i betraktning enn disse to.

Teorien om kontrafaktiske betingelsesutsagn består nå av formuleringene CF1 – CF8 som vi formulerer nedenfor.

Det første aksiomet i teorien, CF1, er trivielt:

CF1 (i) Cf(x,y,w) –> (x,yê(2^I) & wêI)
(ii) TLik(x,w) –> (x Inkl I & wêI)
(iii) Sim;y(x,z) –> x,y,zêI

Den følgende formulering postulerer eksistensen av en mengde med logisk mulige verdener som alle er tilstrekkelig lik verdenen w for enhver verden w:

CF2 (Aw)(wêI –> (E!x)(TLik(x,w)))

Dette aksiomet rettferdigjør den følgende definisjon:

Definisjon 4.1S = Mg(<y,x>: yêI & x Inkl I & TLik(x,y))

13 Se Goodman [1].
14 I denne sammenheng kan man også konsultere Quine [1] og Hempel [1].

Fra denne definisjonen og CF2 følger umiddelbart:

Teorem 4.2 Func(S) & Dom(S)=I & Rgn(S) Inkl Pt(I)

Vi ønsker å bruke en litt mer hendig notasjon for relasjonen (1.34) og definerer derfor:

Definisjon 4.2≤;y = Mg(<x,z>: Sm(y,x,z))

Det følgende aksiom, CF3, uttrykker at relasjonen ≤;y, – "ligner minst like mye på" er en total preordning – med andre ord en preferanserelasjon – over S(y) for hvert yêI:

CF3 (i) yêI & z,w,uêS(y) & <z,w>ê≤;y & <w,u>ê≤;y. –> <z,u>ê≤;y
(ii) yêI & z,wêS(y) –> <z,w>ê≤;y & <w,z>ê≤;y

Siden man har Pref(≤;y Ω (S(y)XS(y)) for alle yêI følger det at alle de teoremene vi tidligere har bevist om preferanserelasjoner også holder for de diverse ≤;y Ω (S(y)XS(y).

Det følgende aksiom er fullstendig vesentlig i teorien og fikserer betydningen til predikatet "Cf(x,y,w)":

CF4 Cf(x,y,w) <–>. x,yê(2^I) & wêI & (c;-1(x,I)ΩS(w) =ø v
(Eu)(uêc;-1(x,I)ΩS(w) & (Az)(zêc;-1(x,I) & <z,u>ê≤;w –> zêc;-1(y,I)))

Studerer man CF4 nøyere ser man at aksiomet fastsetter sannhetsbetingelsene til konstruksjonen Cf på en måte som virker intuitivt rimelig. Det fremgår fra CF4 at Cf(x,y,w) holder hvis og bare hvis ett av følgende er tilfelle:

(a) Utsagnet x er ikke sant i noen verden som er tilstrekkelig lik verdenen w. I dette tilfelle er Cf(x,y,w) så og si "tomt" sant.

(b) Det finnes en verden u der utsagnet x er sant og som er tilstrekkelig lik verdenen w og det er i tillegg slik at i enhver verden z hvor x er sant og der z ligner minst like mye på w som verdenen u er også utsagnet y sant.

Ved noe ettertanke skulle også følgende aksiom fortone seg rimelig:

CF5 (i) (Aw)(wêI –> wêS(w))
(ii) (Aw)(Au)(w,uêI –> (uêS(w) –> <w,u>ê≤;w))
(iii) (Aw)(wêI & S(w)≠ø. –> (Au)(uêI –>(<u,w>ê≤;w <–> w=u)))

Vi legger også til det følgende postulat som sier at relasjonen ≤;w er inneholdt i S(w)X S(w) for alle wêI:

CF6 (Aw)(wêI –> ≤;w Inkl S(w)XS(w))

La oss så betrakte CF7 som relaterer S(w) til den kausale alternativ-relasjonen R;c:

CF7 yêS;w –> R;c(w,y)

Denne formelen uttrykker at dersom y er en verden som er tilstrekkelig lik verdenen w så er y en mulig verden som representerer et kausalt alternativ til verdenen w.

I det følgende vil vi anta at S;e, som vi definerte i Avsnitt A, også inneholder de følgende to konstruksjoner:

(4.4) "Det er kausalnødvendig at F" "CNec(F)"
(4.5) "Hvis det hadde vært tilfelle at F så ville det også ha vært tilfelle at G" "F => G"

Vi definerer med andre ord S;e på en slik måte at CNec êP:<0,0,1>(S;e) og => êP;<0,0,2>(S;e).

Det følgende postulat fastsetter da betydningen til konstruksjonene CNec og => i ethvert språk LêEp(S;e):

CF8 (LêEp(S;e) & X,Yê(2^I) & wêI) –>
(i) Me(CNec,L)(X)‘w =1 <–> (Az)(zêI & R;c(w,z) –> X(z)=1)
(ii) Me(=>, L)(X,Y)‘w =1 <–> Cf(X,Y,w)

Dermed har vi gitt en eksplisitt oversikt over alle de aksiomene i vår teori som har med kontrafaktiske betingelsesutsagn å gjøre. Vi bemerker at om vi arbeider i L;G*, dvs. ønsker å kunne uttrykke et skille mellom f.eks. utsagn og ultrautsagn kan det være gunstig å erstatte CF8 med:

CF8* (LêEp(S;e) & X,Yê(2^W) & wêI) –>
(i) Me(CNec,L)(X)‘w =1 <–> (Az)(zêI & R;c(w,z) –> X(z)=1)
(ii) Me(=>, L)(X,Y)‘w =1 <–> Cf(X*,Y*,w) der
X* = Rest(X,I) og Y* = Rest(Y,I).

§5 Om muligheten av å analysere den kausale alternativrelasjonen R:c

Predikatet R:c er naturlig nok temmelig vagt, men dets betydning kunne kanskje klargjøres noe ved å si at "R;c(x,y)" betyr det samme som:

(1) "Verdenen y er forenelig med alle de kausallovene som gjelder i verdenen x"

La nå J Inkl Mg(x: Lov(x)). Det er da naturlig å si at en verden w er forenelig med alle lovene i J hvis og bare hvis man har (Ax)(xêJ –> Sann;l(x,w)). Bruker vi derfor "CLov(x)" som forkortelse for "x er en kausallov" og setter per definisjon:

q(x) = Mg(z: CLov(z) & Sann;l(z,x)) kunne man anse (1) som sann hvis og bare hvis:

(2) (Az)(zêq(x) –> Sann;l(z,y)).

Man kunne nå innføre "CLov(x)" som et primitivt predikat i teorien. Det ville da være nærliggende å anta at alle kausallover er lover, med andre ord:

CLA1 CLov(x) –> Lov(x)

Setter man nå j(x) = Mg(y: Lov(y) & Sann;l(y,x)) samt C= Mg(x: CLov(x)) har man, noe som skulle være lett å se, at q(x) = C Ω j(x) og dessuten at (2) ovenfor er ekvivalent med

(3) j(x)ΩC Inkl j(y)

Hvis disse overveielsene er rimelige kunne man altså betrakte formelen:

CLA2 R;c(x,y) <–> j(x)ΩC Inkl j(y)

som rimelig. Hvis man antar at CLA2 er korrekt følger det umiddelbart at R;c er en refleksiv og transitiv relasjon. I lys av CF8 innebærer dette at CNec blir en S4-operator, dvs. oppfyller alle aksiomene og slutningsreglene i modalsystemet S4.

Hvis man innfører "CLov(x)" som et nytt primitivt predikat må man spørre om vår tidligere definisjon av dette uttrykket er fri for motsigelser.

Det viser seg at dette er tilfellet. La oss først eksplisitt legge det følgende postulat til vår teori:

CLA3 CLov(x) –> (Ew)(wêI & ¬Sann;l(x,w))

Denne setningen sier at ingen kausallov gjelder i absolutt alle logisk mulige verdener, mao. de er ikke logiske sannheter. Dette virker naturligvis rimelig.

Man kan nå bevise:

Teorem 5.1 CLov(x) –>. Lov(x) & (Ew)(wêI & ¬Sann;l(x,w)) &
(Aw)(Sann;l(x,w) &wêI –>(Aw')(R;c(w,w') –> Sann;l(x,w')))

Bevis: Anta for vilkårlige w,w' at:
(1) CLov(x) & wêI & Sann;l(x,w) & R;c(w,w'). Da har man i lys av CLA2 at
(2) j(w)ΩC Inkl j(w'). Men fra (1) og definisjonene av j og C følger xêj(w)ΩC og derfor i lys av (2) at xêj(w'). Men dette impliserer i lys av definisjonen av j at Sann;l(x,w'). Dette viser at den siste konjunkte i satsen følger fra antesedenten. De to andre konjunktene i konsekventen er implisert av antesedenten i kraft av CLA1 og CLA3. **Q.E.D.**

Det kan nå kanskje virke mer tvilsomt om man kan utlede det omvendte av Teorem 5.1. La oss imidlertid først betrakte endel nye setninger som kan virke rimelige. Først ser vi på:

CLA4 Lov(x) –> (Ew)(wêI & Sann;l(x,w))

Dette virker komplett uskyldig. Av enhvert lovutsagn bør man kunne kreve at det er konsistent.

La oss så definere:

K1(x) <–> (x Inkl C &x≠ø& (Ew)(wêI & (Ay)(yêx –> Sann;l(y,w))))

Som man lett ser innebærer K1(x) at x er en ikke-tom konsistent mengde med kausallover. Vi definerer videre:

K2(x) <–> (Ew)(wêI & ¬Sann;l(x,w)).

Fra definisjonen ser man at K2(x) vil si at x ikke er gyldig i en eller annen verden. Man kan nå betrakte det følgende prinsipp:

CLA5 (i) K1(x) & Lov(y) &K2(y) &
Mg(w: wêI &(Ay)(yêx –> Sann;l(y,w))) Inkl Mg(w: Sann;l(y,w)). –>
CLov(x)

(ii) Lov(y) & K2(y) &Sann;l(y,w) –> (Ex)(CLov(x) &Sann;l(x,w))

Dene setningen er noe lettere å forstå enn det man kan få inntrykk av ved første øyekast. Den sier at dersom en kontingent lov er implisert av en konsistent ikke-tom mengde med utelukkende kausallover så er loven selv en kausallov. Dette kan sikkert diskuteres, men synes ikke å være noen direkte ufornuftig påstand. Den andre klausulen i CLA5 sier at dersom y er en kontingent lov som gjelder i verdenen w så finnes det en kausallov som gjelder i verdenen w. Heller ikke dette virker direkte uplausibelt.

Imidlertid kan man nå bevise, om man antar riktigheten av CLA1 – CLA5, at det omvendte av Teorem 5.1 holder:

Teorem 5.2 Anta (i) CLA1 – CLA5 Da gjelder:

(a) Lov(x) & (Ew)(wêI & ¬Sann;l(x,w)) &
(Aw)(Sann;l(x,w) &wêI –>(Aw')(R;c(w,w') &w'êI –> Sann;l(x,w'))) –>
CLov(x)

Bevis: Anta forutsetningen (i) holder. Anta videre at :

(+) Lov(x) & (Ew)(wêI & ¬Sann;l(x,w)) og

(++) (Aw)(Sann;l(x,w) &wêI –>(Aw')(R;c(w,w') –> Sann;l(x,w')))

Fra (+) følger ved hjelp av definisjonen av K2 at (1) Lov(x) & K2(x). Fra (1) og CLA4 følger eksistensen av w der (2) wêI & Sann;l(x,w). Fra dette og (++) følger:

(3) (Aw')(R;c(w,w') –> Sann;l(x,w')). I lys av CLA2 er dette ekvivalent med: (4) (Aw')(j(w)ΩC Inkl j(w') –> Sann;l(x,w')). La oss sette d0 = j(w)ΩC.

Da har man i lys av definisjonen av j og siste klausul i CLA5 at (5) K1(d0). Anta for vilkårlig w" at w"êI & (Ay)(yêd0 –> Sann;l(y,w")). Dette innebærer at d0 Inkl j(w") og derfor i lys av (4) at Sann:l(x,w"). Siden w" var vilkårlig har vi altså: Mg(w: wêI &(Ay)(yêd0 –> Sann;l(y,w))) Inkl Mg(w: Sann;l(x,w)). Dette, (1), (5) og CLA5 impliserer CLov(x). **Q.E.D.**

Vi har nå vist at om vi bruker "CLov(x)" som et primitivt predikat og legger postulatene CLA1 – CLA5 til vår teori så kan man bevise den definisjonen vi tidligere har gitt av dette predikatet. Denne definisjonen kan derfor legges til den utvidete teorien uten at motsigelser oppstår på grunn av dette.

Vi har nå spesifiert vår teori om kontrafaktiske betingelsesutsagn og også utdypet visse aspekter ved den kausale alternativrelasjonen R;c. Men vi har ennå ikke sett på noen prinsipper som forbinder lover med kontrafaktiske utsagn. Det følgende prinsipp gjør imidlertid akkurat dette:

LA17 Lov(x) & Sann;l(x,w) & wêI. –>
(Az)(zêDom(SNu(A;x)) –> Cf(SNu(A;x)(z), SNu(K;x)(z),w))

Det skulle ikke være så vanskelig å se hva dette aksiomet sier. Anta f.eks at LêEp(S;e). Anta videre at F,GêFm(L) og at x er den eneste variabelen som forekommer fri i formlene F og G. Anta videre at (Ax)(F(x) –> G(x)) representerer en lov i L i den betydningen som ble fastsatt ved Definisjon 3.9 i §3. Under disse omstendigheter har man, om v er en verditilordning over

L og wêI at True(F(x)=>G(x),L,v(x,a),w) om True((Ax)(F(x)–>G(x)),L,v,w). [15] Mer generelt har man om man forusetter at F representerer en lov i L og LA17 holder at:

Val;L(Nec((Ax)(F(x) –> G(x)) –> (Ax)(F(x) => G(x))))

Dette skulle helt tydelig vise hva slags sammenheng LA17 impliserer mellom setninger som representerer lover og setninger som representerer kontrafaktiske betingelsesutsagn.

§6 Angående sammenhengen mellom forklaringer og lover.

I denne paragrafen skal vi forsøke å sette vår generelle teori om lover, som vi nå har spesifisert i §1 – §5, i sammenheng med en teori om forklaringer. Imidlertid utvider vi først L;G og L;G* med det følgende predikat:

(1.36) "Teorien x gir en forklaring på hvorfor x nødvendigvis er tilfelle i verdenen w" "Eksp(x,y,w)"

Resultatet av å utvide L;G med (1.36) kaller vi L;H og språket som fremkommer når L;G* utvide med (1.36) som nytt ikke-logisk predikat kalles for L;H*

Det bør uderstrekes at vi her er interessert i å si noe som kan belyse meningsinnholdet til konstruksjonen (1.36) og at vi ikke vil forsøke å analysere en rekke beslektede konstruksjoner som etter vår mening bør holdes adskilt fra (1.36). Vi er for eksempel ikke interessert i konstruksjonene "Δ er en teori som gir en forklaring på hvordan det er mulig at y er tilfelle i verdenen w", "Δ er en teori som gir et tilfredstillende svar på hva som er årsaken til y i verdenen w" eller "Δ er en teori som gir en forklaring på hvorfor man bør forvente at F er tilfelle i verdenen w". Disse konstruksjonene som etter min mening virker vanskeligere å analysere enn (1.36) krever en separat behandling og diskusjon som vi ikke skal forsøke oss på her.

Det følgende aksiom er narurligvis fullstendig trivielt:

LA18 Eksp(Δ,x,w) <–> (Δ Inkl (2^I) & xê(2^I) & wêI)

Vi definerer dernest hva som forstås ved at x er en E-struktur, i symboler "E(x)":

Definisjon 6.1 E(x) <–> (E£)(Ef)(Ex)(x = <£,f,z> & Lov(£) & In(f,A;£,z))

Som man ser har vi at x er en E-struktur hvis og bare hvis x er et triple der den første komponenten er en lov, den andre komponenten en instansiering av antesedentbetingelsene i loven med hensyn på z og der den tredje komponenten er z.

Vi forklarer så hva som menes med "x er en E-struktur som gir en forklaring på hvorfor y er tilfelle i verdenen w"– "F(x,y,w)" – ved:

Definisjon 6.2 F(x,y,w) <–> (E£)(Ef)(Ez)(w êI & E(<£,f,z>) & Sann;l(£,w) & (Ay)(yêRgn(f) –> y(w)=1) & x=<£,f,z> & y = (iv)(vêK;£)‘v))

Dette vil si at E-strukturen <£,f,z> gir en forklaring på hvorfor y er tilfelle i verdenen w hvis og bare hvis £ er en lov som gjelder i verdenen w, alle utsagnene i verdiområdet til

---

15 Angående definisjonen av uttrykkene True(F,L,v,w) og Val;L(F) se §1 i Kapittel VI i Del I.

instansieringen f av klassen av antesedent-betingelser i £ med hensyn på z er sanne i verdenen w og y er en instans av konsekventbetingelsen i £ med hensyn på z.

Det følgende er et umidelbart og trivielt korollar til definisjonen:

Teorem 6.3 F(<£,f,z>,x,w) –> x(w)=1.

Før vi går videre skal vi se litt på hvordan E-strukturer kan uttrykkes i språk. E-strukturer kan uttrykkes i et språk L ved visse formelmengder i L på samme måter som lover enkeltvis kan representeres ved visse formler i et språk. Vi bruker "FORM;d(L)" som forkortelse for "L er et formalt språk som inneholder navn på ethvert mulig individ", og definerer dette uttrykket slik:

Definisjon 6.4 FORM;d(L) <–>. FORM(L) & (Ax)(xêD –>
(Ey)(yêC;<0,0,0>((L);1) & Me(y,L) = ∂wêI(x)))

Videre definerer vi "ß er en navngivningsfunksjon for L", i symboler "N(ß,L)" ved:

Definisjon 6.5 N(ß,L) <–> FORM;d(L) & Cor(ß) & Dom(ß)=D &
Rgn(ß) Inkl C;<0,0,0>((L);1) &
(Ax)(xêD –> Me(ß(x),L)= ∂wêI(x)).

Vi skal så definere "<F,Δ> uttrykker <£,f,z> relativt til <L,ß>" der L er et et formalt språk som inneholder et navn på hvert mulig individ, ß er en navngivningsfunksjon for L og <£,f,z> er en E-struktur. Vi gjør dette på følgende måte i det vi begrenser oss til formale språk med normalt konnektivsystem for kvantifiksjonsteori:

Definisjon 6.6 Anta FORM;d(L) & QLan(L). Anta videre at N(ß,L) og at E(<£,f,z>). Anta tilslutt at FêFm(L) og Δ Inkl Fm(L). Da sier vi at <F,Δ> uttrykker <£,f,z> relativt til <L,ß>, RE(<F,Δ>,<£,f,z>,<L,ß>) hvis og bare hvis det følgende krav er oppfylt:

(i) Det finnes formler G;1,...,G;n+1 i L og variabeltegn x;1,...,x;mêRgn(Var((L);1) slik at:
(a) F = (Ax;1)...(Ax;n)(G;1&...& G;n –> G;(n+1))
(b) Rep(F,£,L)
(c) Δ = Mg(G;1;(x;1,...,x;m)[ß((z);1),...,ß((z);m)] : 1≤i ≤n)

Lover i den betydning som er fastlagt her er hverken utsagn eller det vi har tillatt oss å kalle for "ultrautsagn". Det gir derfor ikke umiddelbart noen mening å snakke om at en teori impliserer en lov. Vi gir imidlertid en mening til konstruksjonen "Teorien Δ impliserer loven x", "Imp;l(Δ,x)", der Δ er en klasse med utsagn og x er en lov, ved den følgende definisjon:

Definisjon 6.7 Imp;l(Δ,x) <–>. Δ Inkl (2^I) & Lov(x) &
c;-1(SNu(Δ),I) Inkl c;-1(l(x),I)

c;-1(SNu(Δ),I) Inkl c;-1(l(x),I) innebærer at det ikke finnes noen mulige verdener der alle utsagnene i Δ er sanne og der utsagnet l(x) er usant, mao. at alle utsagnene i Δ impliserer l(x), det utsagnet som er sant i alle, og bare, de verdenene hvor loven x gjelder.

Vi definerer så hva som menes med "Teorien Δ impliserer E-strukturen x" ved:

Definisjon 6.8 Imp;e(Δ,x) <–> (Δ Inkl (2^I) & E(x) & Imp:l(Δ, (x);1) &
(Ay)(yêRgn((x);2 –> c;-1(SNu(Δ),I) Inkl c;-1(y,I)))

På dette stadium er vi istand til å definere mer presist hva som menes med at en teori Δ implisitt gir en forklaring på hvorfor x er tilfelle i w. Dette skjer ved:

Definisjon 6.9 IExp(Δ,x,w) <–> (Δ Inkl (2^I) & xê(2^I) & wêI &
(Az)(zêΔ –> z(w)=1) & (Ey)(E(y) & ΔImp;e(Δ,y) &
x= (ir)(rêK;((y);1)‘(y);3))))

Også denne definisjonen kan virke noe uigjennomsiktig ved første øyekast. Ved noe refleksjon skulle det imidlertid være lett å se poenget.

Ved hjelp av Definisjon 6.2 og Definisjon 6.9 kan man utlede:

Teorem 6.10 IExp(Δ.x.w) <–> (Δ Inkl (2^I) & xê(2^I) & wêI &
(Az)(zêΔ –> z(w)=1) & (Ey)(E(y) & ΔImp;e(Δ,y) & F(y,x,w)))

La oss tilslutt, før vi presenterer det neste teoretiske prinsippet i denne forklaringsteorien, gi nok en definisjon. "J(x)" vil si at x er en instans av konsekventbetingelsen i en eller annen lov. Formell definisjon:

Definisjon 6.11 J(x) <–> (Ez)(Lov(z) & xêRgn((ir)(rêK;x)))

Siden ingen instans av konsekventbetingelsen i en lov i følge LA15 er ekvivalent med noe lovutsagn har man at J(x) –> ¬(Ez)(Lov(z) & l(z)=x).

Vi kan nå formulere vårt neste forklaringsteoretiske aksiom:

LA19 J(x) –> (Eksp(Δ,x,w) <–> IExp(Δ,x,w))

Aksiomet sier at de utsagn x som er slik de er instanser av konsekventbetingelser i en eller annen lov har den følgende egenskap: En teori Δ gir en forklaring på hvorfor x nødvendigvis er tilfelle i verdenen w hvis og bare hvis Δ gir implisitt en forklaring – i den betydning som ble fastlagt ved Definisjon 6.9 – på hvorfor x er tilfelle i verdenen w.

§7 Forklaring av lover.

Vi har ovenfor tatt for oss det tilfelle der en lov kan brukes til å forklare et singulært saksforhold. Dette er i det minste delvis tatt vare på i det innførte begrep E-struktur. Imidlertid har vi ikke sett på hvordan lovr kan tilbakeføres og utledes fra mer generelle samlinger med lover. Tilbakeføringskjeder av denne typen kan sies å representere forklaringer av lover og ikke bare av singulære kjensgjerninger. Det er altså ingenting i veien for at en lov £ kan implisere en rekke andre lover £;1,...,£;n som er svakere enn £. Det virker da plausibelt å si at £ gir en forklaring på de diverse £;i. Man kan også generalisere dette noe. Anta Δ Inkl Mg(x: Lov(x)) og at £ er implisert av Δ, men ikke av noen utsagnsmengde X der X Inkl Δ. La oss videre forutsette at Snu(Mg(l(x): xêΔ)) er et konsistent og at: c;-

1(Snu(Mg(l(x): xêΔ)),I) SInkl c;-1(l(£),I) og at Δ er en uavhengig mengde med lover. I dette tilfellet virker det naturlig å si at Δ representerer en forklaring på loven £.

Vi tillater oss å formalisere disse betraktningene. Først definerer vi relasjonen R ved:

Definisjon 7.1 Relasjonen R(Δ,£) holder hvis og bare hvis Δ og £ oppfyller de følgende krav:

(i) Δ Inkl Mg(x: Lov(x)) & Lov(£)
(ii) (Ew)(wêI & (SNu(Mg((l(x): xêΔ)))(w) =1)
(iii) Uavh(Mg(l(x): xêΔ))
(iv) c;-1(Snu(Mg(l(x): xêΔ)),I) SInkl c;-1(l(£),I)
(v) ¬(EX)(X SInkl Δ & c;-1(Snu(Mg(l(x): xêX)),I) SInkl c;-1(l(£),I))

Vi kan så gi den følgende, helt tentative, definisjon av "Teorien Δ gir en forklaring på loven £", i symboler "Ie(Δ,£)":

Definisjon 7.2 Ie(Δ,£) <–> Lov(£) & Δ Inkl (2^I) & (E∏)(R(∏,£) & c;-1(SNu(Δ),I) Inkl c;-1(SNu(Mg(l(x): xê∏)),I)

En kontingent lov er en lov y der l(y) er et kontingent utsagn, dvs. et utsagn som er sant i noen mulige verdener, mens det er usant i andre:

Definisjon 7.3 Lov;k(x) <–> (Lov(x) &(Ew)(wêI & wêl(x)) & (Ew)(wêI &¬(wêl(x)))

Vårt andre forklaringsteoretiske aksiom kan da formuleres slik:

LA20 Lov;k(x) –> [Eksp(Δ,l(x),w) <–> (Ie(Δ,x) & (Ay)(yêΔ –> y(w)=1))]

Vi vil tilslutt presentere en definisjon av "forklaringsverdi". Mer nøyaktig gir vi en definisjon av de to predikatene "Teorien Δ1 har større forklaringsverdi enn teorien Δ2 relativt til verdenen w" – "SFv(Δ1,Δ2,w)" –, og "Teorien Δ1 har like stor forklaringsverdi enn teorien Δ2 relativt til verdenen w" – "LFv(Δ1,Δ2,w)", ved:

Definisjon 7.4(i) SFv(Δ1,Δ2,w) <–>
Mg(z: Ie(Δ2,z)v IExp(Δ2,z,w)) SInkl
Mg(z: Ie(Δ1,z)v IExp(Δ1,z,w))

(ii) LFv(Δ1,Δ2,w) <–>
Mg(z: Ie(Δ2,z)v IExp(Δ2,z,w)) =
Mg(z: Ie(Δ1,z)v IExp(Δ1,z,w))

Denne definisjonen representerer etter vår mening bare en mulig presisering av det vage og egentlig høyest uklare uttrykket "Δ1 har større forklaringsverdi enn Δ2". Vi utelukker ikke at det kan finnes andre og bedre presiseringer av uttrykket. Man kan f.eks. sammenligne Definisjon 7.4 med Definisjon 7.6 nedenfor i det vi først innfører "Fk(Δ,x)" ved:

Definisjon 7.5 Fk(Δ,x) <–> (Δ Inkl (2^I) & xê(2^I) & (Ey)(E(y) & Imp;e(Δ,y) & x= (ir)(rêK;((y);1)((y);3))))

Man kan sammenligne denne definisjonen med Definisjon 6.9 i §6. Vi innfører så relasjonene SFv* og LFv* som ikke er relativisert til mulige verdener ved:

Definisjon 7.6(i) SFv*(Δ1,Δ2) <–>
Mg(z: Ie(Δ2,z)v Fk(Δ2,z)) SInkl
Mg(z: Ie(Δ1,z)v Fk(Δ1,z))
(ii) LFv*(Δ1,Δ2) <–>
Mg(z: Ie(Δ2,z)v FK(Δ2,z)) =
Mg(z: Ie(Δ1,z)v Fk(Δ1,z))

I forbindelse med disse definisjonene er det også meget nærliggende og innføre det følgende absolutte mål på forklaringsverdi:

Definisjon 7.7 NFk(Δ) = Cd(Mg(z: Fk(Δ,z) v Ie(Δ,z)))[16]

Denne definisjonen impliserer at NFk(Δ) er kardinaltallet til klassen av alle de utsagn som Δ enten gir en forklaring på "via E-strukturer", eller som er slik at de representerer lover som Δ forklarer.

Ved hjelp av Definisjon 7.5 – Definisjon 7.6 er det lett å bevise:

Teorem 7.8 (i) SFv*(Δ1,Δ2) –> NFk(Δ1)≥NFk(Δ2)
(ii) LFv*(Δ1,Δ2) –> NFk(Δ1) = NFk(Δ2)
(iii) SN(Mg(c;-1(x,I): xêΔ1)) SInkl SN(Mg(c;-1(x,I): xêΔ1)) &
Δ1,Δ2êPt(2^I) & NFk(Δ1)> NFk(Δ2). –> SFv*(Δ1,Δ2)

Dette avslutter fremstillingen av vår teori om forklaringer.

§8 Oppsummering. Definisjoner av teoriene E, E:1 og E:2.

Vi har nå kommet å langt at vi kan gi avsluttende definisjoner av teoriene E, E;1 og E;2.

La oss først gi en rigorøs definisjon av teorien E;2. Vi definerer først språket til E;2:

Definisjon 8.1L;(E;2) er det første-ordens språket som resulterer når L:A* utvides med de følgende ikke-logiske predikater:

(a) Predikatene på listen (1.1) – (1.22) i §1 i Avsnitt A.
(b) Predikatene (1.23) – (1.26) i §1 i Avsnitt D.
(c) Predikatene (1.27) – (1.31) i §1 i Avsnitt E
(d) Predikatene (1.32) – (1.34) i §4 i dette avsnittet.
(e) Predikatet (1.36) i §6 i avsnittet E
(f) Predikatet (1.35) "x er en kausallov" – "CLov(x)".

Predikatene nevnt under (a) – (f) er ment å være primitive predikater i L;(E;2).

Som man ser er L;(E;2) et meget rikt første-ordens språk. (Se forøvrig Appendix I). Teorien E;2 er nå definert ved:

---

16 Vi minner om at "Cd(X)" betegner kardinaltallet til mengden X. Cd(Mg(z: Fk(Δ,z) v Ie(Δ,z))) vil derfor være kardinaltallet til mengden Mg(z: Fk(Δ,z) v Ie(Δ,z)).

Definisjon 8.2 Teorien E;2 er den første-ordens teorien som er bestemt på følgende måte:

(i) Språket til E;2 er L;(E;2)
(ii) De ikke-logiske aksiomene i teorien er:
  (a) Alle de ikke-logiske aksiomene i T;A* pluss Sm27
  (b) Alle instanser av utsondrings og replacemet aksiomet i L;(E;2)
  (c) Alle de følgende aksiomer:
    (1) EpUA1 – EpUA17
    (2) EpUE1, EpUE2
    (3) EpUB1 – EpUB4
    (4) EPUC1 – EpUC6, EpUD1 – EpUD3
    (5) BEV1
    (6) LA1 – LA17, CF1 – CF7, CF*8
    (7) CLA1 –CLA5
    (8) LA18 – LA20

Disse klausulene bestemmer teorien fullstendig.

Dermed har vi gitt en helt eksplisitt definisjon av E;2. Definisjonene i teorien er alle dem vi har nevnt i Kapittel I – II og som kan brukes om vi forutsetter at det dras et skille mellom intensjonale og ultraintensjonale objekter.

Vi vender oss så mot teorien E;1:

Definisjon 8.3 L;(E;1) er det første-ordensspråket som frekommer når L;A utvides med de følgende predikater som nye ikke-logiske predikater:

(i) Alle predikatene nevnt under punkt (a) og punkt (c) – (f) i Definisjon 8.1

Man ser at vi har fjernet de predikatene som har med bevis å gjøre i L;(E;1). Selve teorien E;1 kan defineres slik:

Definisjon 8.4 Teorien E;1 er den første-ordens teorien som er bestemt på følgende måte:

(i) Språket til E;1 er L;(E;1)
(ii) De ikke-logiske aksiomene i teorien er de følgende:
  (a) Alle de ikke-logiske aksiomene i T;A pluss Sm27
  (b) Alle instanser av utsondrings og replacemet aksiomet i L;(E;1)
  (c) Alle de følgende aksiomer:
    (1) EpA1 – EpA17
    (2) EpE1, EpE2
    (3) EpB1 – EpB4
    (4) EPC1 – EpC6, EpD1 – EpD3
    (5) LA1 – LA20, CF1 – CF8
    (6) CLA1 –CLA5

Punkt (i) og (ii) bestemmer entydig teorien E;1

Kutter vi vekk fra E;2 aksiomet BEV1 og fjerner vi også de predikatene fra L;(E;2) som har med dette aksiomet og gjøre får vi en teori som er helt analog med E;1 og som står omtrent i samme forhold til E;1 som T;A* står i forhold til T;A.

Vi ga en definisjon av teorien E i §4 i Avsnitt C. Det kan være av interesse å definere E på en litt annen måte slik at det blir lettere å se hvordan E forholder seg til E;1 og E;2.

L;E er som man husker språket L;A utvidet med predikatene (1.1) – (1.22) i §1 i Avsnitt A. Teorien E kan nå defineres slik:

Definisjon 8.5 Teorien E er den første-ordens teorien som er bestemt på følgende måte:

(i) Språket til E er L;E
(ii) De ikke-logiske aksiomene i teorien er de følgende:
  (a) Alle de ikke-logiske aksiomene i T;A
  (b) Alle instanser av utsondrings og replacemet aksiomet i L;E
  (c) Alle de følgende aksiomer:
    (1) EpA1 – EpA17
    (2) EpE1, EpE2
    (3) EpB1 – EpB4
    (4) EPC1 – EpC6, EpD1 – EpD3

Som man ser får man teorien E ved å fjerne aksiomene LA1 – LA20, CF1 – CF8 og CLA1 – CLA5 fra E;1, samt ved å innsnevre språket tilsvarende.

Vi har nå nådd det som var vårt mål i dette kapitlet, nemlig å gi en fullstendig detaljert beskrivelse av teorien E;2 og de to beslektede teoriene E;1 og E.

Teorien E;2 er naturligvis bare en blandt et mangfold av filosofisk pregede teorier vi kunne ha tatt i betraktning. Det synes f.eks. ikke noe i veien for å ha utvidet en eller flere av teoriene T;B,T;C, T;D, T;C* – T;D* som ble nevnt i Del I med de aksiomene – eller passende varianter av dem – som vi i dette kapitlet har utvidet T;A og T;A* med. Heller ikke er det noe som kan hindre en i å betrakte andre aksiomer enn dem som har blitt nevnt her. Vi mener altså ikke at E;2 er noen "fullstendig erkjennelsesteori" i noen spesielt rimelig betydning av ordet "fullstendig". Av denne grunn oppfattes heller ikke språket L;(E;2) her som noe "fullstendig" erkjennelsesteoretisk språk og vi innrømmer naturlig nok at vår fokusering av E;2 er beheftet med en viss grad av vilkårlighet.

En ting er å definere en teori, en annen ting er å utvikle den. Det som så langt har blitt gjort er mest å regne som et første skritt henimot en klarere forståelse av en slik teori som E;2. Det neste skritt burde derfor være å få et mer dyptgående innblikk i hva teorien sier, f.eks. hvilke satser som er utledbare i den og hvilke som ikke er det, hvilke teorier den er forenelig med og hvilke som den er uforenelig med. Videre oppstår slike spørsmål som hvorvidt teorien er konsistent eller ikke, hvorvidt den kan reaksiomatiseres på en enklere måte, hvorvidt den kan reduseres til andre mer fundamentale teorier eller intepreteres på en eller annen interessant måte inn i mer fundamentale teorier.

I de neste kapitlene, Kapittel III og Kapittel IV vil vi ta opp en del av disse spørsmålene til behandling.

Kapittel III

Kapittel III

§0 Innledning.

I kapittel II fullførte vi konstruksjonen av den omfattende teorien E;2. I dette kapitlet ønsker vi å studere visse modeller for E;2 i en betydning som vil bli nærmere gjort rede for. Dette er motivert av to forhold: For det første ønsker vi å vise at teorien, gitt visse premisser som ikke er urimelige, er konsistent. For det andre ønsker vi å vise at den ikke inneholder grove motintuitive konsekvenser.

La oss først si noen ord om konsistensproblemet. Siden ZFC er inkludert i E;2 følger det umiddelbart fra Gødels konsistensresultater at man ikke i E;2 kan bevise at E;2 er motsigelsesfri. Heller ikke kan bevise påstanden at E;2 er konsistent i ZFC eller noen svakere teori om man forutsetter at disse er konsistente. Det mest realistiske synes derfor å være at man bare kan vise at E;2 er konsistent relativt til en forholdsvis velkjent teori som svært få egentlig nærer noen alvorlige mistanker om at er motsigelsesfull. ZFC synes å være en slik teori.

Vi vil i neste paragraf definere hva som forstås ved en mengdeteoretisk intepretasjon og vise at *dersom* det finnes en slik intepretasjon av E;2 inn i ZFC så er E;2 konsistent relativt til ZFC. Dette resultat er forholdsvis trivielt. Mindre åpenbart er det om det finnes noen slik intepretasjon. Dette problem vil ikke bli løst i dette kapitlet selvom vi tror det er ganske klart, intuitivt sett, at man bør forvente en positiv løsning. I stedet vil vi her konstruere mengdeteoretiske intepretasjoner av forholdsvis omfattende fragmenter av E;2 og derved vise at vesentlige deler av E;2 er konsistente relativt til ZFC.

Når det gjelder det andre problemet som ble nevnt ovenfor, nemlig hvorvidt man i E;2 kan utlede grovt motintuitive konsekvenser, sier det seg vel nærmest av seg selv at det ikke kan gis noen eksakt løsning på dette før man klargjør hva som eventuelt rimligvis bør forstås ved en motintuitiv konsekvens. Det nærmeste man tilsynelatende kan komme i retning av en "løsning" på dette problem ville trolig være å konstruere modeller for E;2 som i vesentlige henseende er så lik den "naturlige", "intenderte" modellen som mulig. Eventuelt ville det være at man konstruerte et mangfold av slike modeller som var så rikt og variert som mulig. I alle tilfelle synes det fruktbart og nyttig å konstruere modeller siden dette kan bidra til å gjøre det klarere hva som følger fra teorien og hva som ikke gjør det. Dette kan i hvert fall i noen grad bidra til å øke ens innsikt i den.

Hovedpunktene i dette kapitlet er som følger: I den neste paragrafen vil vi definere presist det modellbegrepet vi vil arbeide med, samt de fleste av de hjelpebegrepene som vi har behov for. Deretter vil vi konstruere en modell for en temmelig omfattende del av E;2. Fra dette vil det følge at dette fragmentet er konsistent relativt til ZFC. I de siste paragrafene vil vi spesielt ta for oss de lovteoretiske aksiomene og studere modeller for dem.

§1 Preliminære begrepsdannelser.

I det følgende lar vi "L;ê" betegne det første-ordens språket som bare har "xêy" som ikke-logisk predikat. Det følger at L;ê ikke inneholder f.eks. funksjons-symboler. Identitetspredikatet "=" er med i L;ê men regnes som et logisk symbol. De vanlige

identitesaksiomene regnes som logiske aksiomer. L;ê er med andre ord språket til ZF. La L være en utvidelse av L;ê med nye primitive, ikke-logiske, predikater. Vi betegner klassen av alle slike utvidelser L av L;ê med "U[L;ê]". Er LêU[L;ê] er naturligvis variabeltegnene, kvantorene, de setningslogiske konnektivene, medlemspredikatet og identitetspredikatet de samme i L og L;ê. Er LêU[L;ê] betegner vi mengden av de n-ære predikatene i L ($n \geq 1$) med "Pred;n(L)".

Vi skal nå definere hva som forstås med en mengdeteoretisk intepretasjon av L inn i L;ê om LêU[L;ê]. Dette skjer ved:

Definisjon 1.1 Anta LêU[L;ê]. Med en mengdeteoretisk intepretasjon M av L inn i L;ê forstår vi en funksjon M som oppfyller de følgende krav:

(i) M tilordner ethvert n-ært ikke-logisk predikat π i L en formel F i L;ê som inneholder nøyaktig n distinkte fri variabler x;1,...,x;n hvor disse er alfabetisk sett de første variablene i L;ê.

(ii) Videre tilordner M formlene i L formler i L;ê induktivt på følgende måte:

(a) Er F,GêFm(L) gjelder M(F&G) = M(F) & M(G)

(b) Er FêFm(L) gjelder M(¬F) = ¬M(F)

(c) Er F,GêFm(L) gjelder M(F–>G) = M(F)–> M(G)

(d) Er x et variabeltegn i L og FêFm(L) gjelder M(Ax)F) = (Ax)M(F(x))

(e) Er πêPred;n(L) og er y;1,...,y;n en sekvens av n varabeltegn i L gjelder
M(π(y;1,...,y;n)) = M(π);(x1,...,x;n)[y;1,...,y;n]

(f) Er x,y variabeltegn i L gjelder M(x=y) = (x=y)

(g) Er x,y variabeltegn i L gjelder M(xêy) = (xêy)

Dermed er det fullstendig definert hva som forstås med en mengdeteoretisk intepretasjon av L inn i L;ê. Er LêU[L;ê] betegner vi klassen av alle mengdeteoretiske intepretasjoner av L inn i L;ê med I(L,L;ê). I dette kapitlet skal vi også tillate oss å kalle elementene i I(L,L;ê) for "mengdeteoretiske modeller for L", eller kortere for "modeller for L".

Det følgende lemma er temmelig trivielt og bevises ved induksjon på lengden av formler i L

Lemma 1.2 Anta LêU[L;ê] og at MêI(L,L;ê). Da har man:
(AF)(FêFm(L;ê) –> M(F) = F)

I det følgende lar vi FT(L) være klassen av første-ordens teorier over L. Er TêFT(L) betegner "NAx(T)" de ikke-logiske aksiomene i T. "LAx(T)" betegner de logiske aksiomene i T. Th(T) er klassen av teoremer i T. Vi tenker oss at de logiske aksiomene er et vanlig sett av Hilbert-typen, f. eks. de som er nevnt i Shoenfield [1], for de setningslogiske konnektivene, kvantorene og identitets-predikatet. Slutningsreglene i enhver første-ordens teori tenkes her utelukkende å være modus ponens og universell generalisering. "ZF" betegner naturligvis Zermelo-Fraenkel systemet. ZFC er ZF utvidet med utvalgsaksiomet. Vi har selvfølgelig at ZF og ZFC er første-ordens teorier i L;ê, mao. ZF,ZFCêFT(L;ê).

Definisjon 1.3 Anta LêU[L;ê] og MêI(L,L;ê). Anta FêFm(L), Δ Inkl Fm(L) og at T er en første-ordens teori i L, ie. TêFT(L). Under disse omstendigheter sier man at:

(i) F er M-gyldig, i symboler "Val;M(F)" hvis og bare hvis
M(F)êTh(ZFC).

(ii) Δ er M-gyldig, i symboler "Val;M(Δ)" hvis og bare hvis
(AF)(FêΔ –> Val;M(F))
(iii) M er en modell for T, i symboler "Val;M(T)" hvis og bare hvis
(AF)(FêTh(T) –> Val;M(F))

En mengdeteoretisk intepretasjon av L inn i L;ê er altså en modell i denne forstand for første-ordens teorien T i L hvis og bare hvis man har at alle teoremene i T er gyldige i M. Dette siste innebærer at for enhver formel F som er et teorem i T må man ha at M(F)êTh(ZFC).

Vi bemerker at den følgende hjelpesetningen holder:

Lemma 1.4 (Konsistenslemma) Anta LêU[L;ê] og MêI(L,L;ê). Anta videre at TêFT(L). Da gjelder:

¬(EF)(FêFm(L;ê) & (F&¬F)êTh(ZFC)) & Val;M(T) –>
¬(EF)(FêFm(L;ê) & (F&¬F)êTh(T))

Med andre ord er det slik at det finnes en mengdeteoretisk intepretasjon av L inn i L;ê som modellerer T og det ikke er mulig å utlede noen motsigelse i ZFC så er det ikke mulig å utlede så er det heller ikke muligå utlede noen motsigelse i T. Dette innebærer at om det finnes en mengdeteoretisk intepretasjon M av L inn i L;ê hvor alle teoremene i T er M-gyldige så er T konsistent relativt til ZFC.

La TêFT(L) og Δ Inkl Fm(L). Da er T[Δ] første-ordens teorien T utvidet med formlene i Δ som nye ikke-logiske aksiomer. Vi skriver, om FêFm(L), "T[F]" istedet for "T[{F}]". Vi lar Q(L) være den første-ordens teorien i L som bare har logiske aksiomer og ingen ikke-logiske aksiomer.

Man har:

Lemma 1.5 Anta LêU[L;ê] og at MêI(L,L;ê). Da gjelder:
(AF)(FêTh(Q(L)) –> Val;M(F))

Bevisene for Lemma 1.4 og Lemma 1.5 er meget enkle og overlates derfor til leseren som en øvelse.

Lemma 1.6 Anta FêFm(L) og LêU[L;ê]. Anta dessuten at TêFT(L) og at:
(i) ¬(EF)(FêFm(L;ê) & (F&¬F)êTh(ZFC))
(ii) MêI(L,L;ê) & Val;M(T) & Val;M(¬F). Da gjelder: ¬(FêTh(T)).

Lemma 1.6 er viktig fordi det viser at en tilstrekkelig betingelse for at en formel F ikke er bevisbar i T, dvs. ikke er noe teorem i T er at det finnes en modell som modellerer T samt negasjonen av F. Forbeholdet om at ZFC er nødvendig.

Anta LêU[L;ê], FêFM(L) og at TêFT(L). Vi sier da at F er uavhengig av T hvis og bare hvis ¬(FêTh(T)) & ¬((¬F)êTh(T)). Vi bruker "Uav(F,T)" som forkortelse for "F er uavhengig av T".

Er TêFT(L) & Pred(L') Inkl Pred(L) der Pred(L) = UN/nêN/(Pred;n(L)) og L,L'êU[L;ê] betegner "Rest(T,L')" den første-ordens teorien i L' som har som ikke-logiske aksiomer de ikke-logiske aksiomene i T som er formler i L'.

Er L;1, L;2êU[L;ê] sier vi at L;2 er en utvidelse av L;1 hvis og bare hvis man har at Pred(L;1) Inkl Pred(L;2). Har man MêI(L;2,L;ê) så er Rest(M,L;1), restriksjonen av intepretasjonen M til L;1, dvs. den intepretasjonen M'êI(L;1,L;ê) som er slik at (Aπ)(πêPred(L;1) –> Rest(M,L;1)(π) = M(π)).

La oss tilslutt definere uttrykket "Konsis(T)", som leses "T er en konsistent første-ordens teori" ved:

Konsis(T) <–> ¬(EF)(FêFm(L) & (F&¬F)êTh(T)).

Vi forutsetter i denne forbindelse at TêFT(L) og at LêU[L;ê]. Det skulle være klart at dersom det finnes en formel som er uavhengig av T så er T konsistent. Den motsatte slutningen holder selvfølgelig ikke.

Vi har bruk for hjelpesetningene nedenfor:

Lemma 1.7 Anta LêU[L;ê] og TêFT(L) & MêI(L,L;ê) og Val;M(NAx(T)).
Da gjelder: Val;M(Th(T))

Som man ser innebærer denne hjelpesetningen at dersom alle de ikke-logiske aksiomene i en første-ordens teori er gyldige i en modell er også alle teoremene gyldige i modellen. Vi overlater beviset for denne satsen som en øvele til leseren.

Lemma 1.8 Anta (i) Konsis(ZFC) & LêU[L;ê] & TêFT(L) & FêFm(L). Anta dessuten at
(ii) M;1êI(L,L;ê) & Val;(M;1)(T) & M;2êI(L,L;ê) & Val;(M;2)(T)
Anta tilslutt at (iii) Val;(M;1)(F) & Val;(M;2)(¬F). Da har man at F er uavhengig av T, mao. at Uav(F,T).

Dette er en umidddelbar konsekvens av Lemma 1.6 og definisjonen av "Uav(F,T)".

Man kan bemerke at alle de begrepsdannelsene vi har innført så langt i denne paragrafen kan gis eksplisitte standardpregede mengdeteoretiske definisjoner og at Lemma 1.2 – Lemma 1.8 derfor kan formaliseres og bevises i ZFC. Siden Th(ZFC) Inkl Th(E;2) følger det Lemma 1.2 – Lemma 1.8 også kan bevises i E;2. I det hele tatt kan alle de setningene vi skal bevise i dette kapitlet bevises i E;2. Det følger at vi kommer til å bevise satser om E;2 og fragmenter av E;2 i denne teorien selv. Faktisk kan våre satser formaliseres og bevises i en meget mer elementær del av E;2 enn ZFC, nemlig den elementære tallteori. Våre resultater er derfor potensielt akseptable for dem som ikke aksepterer E;2, eller som ser på store deller av denne teorien som mer eller mindre meningsløs fra en vitenskapelig synsvinkel.

I dette arbeidet vil det ikke bli gjort noe forsøk på å bevise den følgende sats. I våre øyne virker det sannsynlig at den er riktig og at det kan forventes at noen før eller senere verifiserer den. Vi oppfører den her som en gjetning. Satsen sier at det finnes en mengdeteoretisk intepretasjon M av L;(E;2) inn i L;ê som avbilder alle teoremene i E;2 på teoremer i ZFC:

Gjetning 1.9 (E;2) (EM)(MêI(L;(E;2), L;ê) & Val;M(Th(E;2))

Den følgende sats, som vi kaller Gjetning 1.10, er et korollar til Gjetning 1.9:

Gjetning 1.10 (E;2) (i) Konis(ZFC) –> Konsis(E;2)
(ii) Konsis(ZFC) –> Konsis(T;A*)

Naturligvis kan lignende påstander, som også etter vår mening fortoner seg plausible og som man kan forvente at det er mulig å gi bevis for, formuleres for teoriene E;1 og E:

Gjetning 1.11 (ZFC) (i) (EM)(MêI(L;(E;1), L;ê) & Val;M(Th(E;1))
(ii) (EM)(MêI(L;E), L;ê) & Val;M(Th(E))

La oss tilslutt bemerke i forbindelse med disse gjetningene at L;(E;1), L;E og L;(E:2), samt teoriene E, E;1 og E;2, kan gis rigorøse definisjoner i rent mengdeteoretiske termer. Dette burde være klart for leseren om vedkommende erindrer de definisjonene vi tidligere har gitt. Det skulle også være klart at vi har:

Lemma 1.12 (i) L;E, L;(E;1), L;(E;2)ê U[L;ê]
(ii) E êFT(L;E) & E;1 êFT(L;(E;1)) E;2 êFT(L;(E;2))

§2 Et fragment av L:(E:2)

Som tidligere antydet skal vi ikke i dette kapitlet forsøke å formulere noen mengdeteoretisk intepretasjon av hele L;(E;2) inn i L;ê. Vi skal begrense oss til et fragment av L;E, nemlig L;0. Dette er det første-ordens språket som foruten ê-predikatet inneholder nøyaktig de følgende ikke-logiske predikater:

(0.1)	MV(x)	(1.10)	VS(x,y,t,w)
(0.2)	W(x)	(1.11)	Ser(x,y,t,w)
(0.3)	Eksi(x,w)	(1.12)	Hør(x,y,t,w)
(0.4)	MI(x)	(1.13)	Er(x,y,t,w)
(1.1)	Evid(x,w)	(1.14)	Vet(x,y,t,w)
(1.2)	DEvid(x,w)	(1.15)	Tror(x,y,t,w)
(1.3)	TEvid(x,w)	(1.16)	BørA(x,y,w)
(1.4)	Evid(x,y,t,w)	(1.17)	Bør(x,y,w)
(1.5)	Evid(x,y,t)	(1.18)	Enk(x,y,w)
(1.6)	DEvid(x,y,t,w)	(1.19)	LEnk(x,y,w)
(1.7)	TEvid(x,y,t,w)	(1.20)	Tp(x,w)
(1.8)	TEvid(x,t,w)	(1.21)	Før(x,y,w)
(1.9)	Kntr(x,y,t,w)	(1.22)	Avst(z,x,y,w)

Man bør sammenligne denne listen med listen av predikater (1.1) – (1.22) i §1, Avsnitt A i Kapittel II. For å unngå flertydigheter skriver vi "Evid2(x,w)", "Evid3(x,t,w)" og "Evid4(x,y,t,w)" i stedet for (1.1), (1.5) og (1,4). Videre skriver vi "TEvid2(x,w)", "TEvid3(x,t,w)" og "TEvid4(x,y,t,w)" i stedet for henholdsvis (1.3), (1.8) og(1.7). En helt tilsvarende konvensjon vil bli benyttet ved paret (1.2), (1.6). Tallene som føyes til disse predikatene er det meningen at skal minne en om graden til dem.

Det skulle være klart at vi har L;0êU[L;ê].

§2.1 En mengdeteoretisk intepretasjon av L:0 inn i L:ê

Vi skal nå definere en bestemt MêI(L;0,L;ê) som vi i den neste paragrafen vil vise at er en modell for Rest(E;2,L;0), dvs. for teorien E;2 med språket begrenset til L;0. For å definere M er det tilstrekkelig å definere M(π(y;1,...,y;n)) for hvert primitivt ikke-logik predikat i L;0 bortsett fra identitetspredikatet og medlemspredikatet.

I det følgende betegner "Reell" mengden av de reelle tall definert i rent mengdeteoretiske termer på standard måte. 0,1,2,3,4 ...,n,.. er de naturlige tallene. Alle tallteoretiske predikater og funksjonssymboler som vi skal benytte i definisjonen av M og som har tilknytning til Reell tenkes definert i rent mengdeteoretiske termer. Den modellen vi skal definere er naturligvis ikke den eneste som kan konstrueres og den er av en helt abstrakt, artifisiell karakter.

Vi definerer først MI;M ved:

(1) M(MI(x)) =: xêReellU(ReellX{0})

De mulige individene i modellen M identifiseres altså med klassen av de reelle tall pluss klassen av par <x,0> der x er et reellt tall. Det er hensikten at ReellX{0} skal representere de av de mulige individene i modellen som er tidspunkter. Alle verdenene i modellen, inkludert de logisk mulige verdenene identifiseres med punktene i det to-dimensjonale Evklidske rom ReellXReell:

(2) M(MV(x)) =: xêReellXReell
(3) M(W(x)) =: XêReellXReell

Som man ser har man da at M(Ax(MV(x) <–> W(x)) = M(I=W)êTh(ZFC). Vi sondrer altså ikke mellom verdener og logisk mulige verdener i modellen. Alle verdener er logisk mulige og det finnes ikke unormale verdener.

Vi fastsetter så intepretasjonen av "Eksi(x,w)" ved:

(4) M(Eksi(x,w)) =: (xêReellU(ReellX{0}) & wêReellXReell)

I forbindelse med denne klausulen i definisjonen av M bemerkes det at vi nå har at f= Mg(<w,Mg(x: Eksi(x,w))>: wêI) er en konstantfunksjon i selve modellen.

Defineres M slik at (1) – (4) holder er det lett å se at alle de ontologiske aksiomene i Rest(E;2,L;0) holder i M. Eksempelvis har man for aksiomet (Ey)(y=D) at:

M((Ey)(y=D) = M((Ey)((Ax)(xêy <–> MI(x)))) =
(Ey)((Ax)(xêy <–> M(MI(x)))) =
(Ey)((Ax)(xêy <–> xêReellU(ReellX{0}))).

Men den siste formelen i denne rekken av identiteter er åpenbart bevisbar i ZFC. Dette innebærer at aksiomet (Ey)(y=D) er gyldig i modellen M. Verifikasjonen av de andre ontologiske aksiomene i Rest(E;2,L;0) er omtrent like enkel.

Vi vender oss nå til intepretasjonen av de tidsteoretiske predikatene (1.20) – (1.22) på listen i §2. Vi setter:

(5) M(Tp(x,w)) =: (xêReellX{0} & wêReellXReell)

Som man ser følger det fra dette at mengden av tidspunkter i modellen ikke foradres ettersom ma går fra en verden til en annen.

Vi definerer så intepretasjonen av Før-relasjonen ved:

(6) M(Før(x,y,w)) = (x,yêReellX{0} & (x);1<(y);1 & wêReellX Reell)

Igjen ser man at Før-relasjonen forblir konstant når man går fra verden til verden om man tolker "Før(x,y,w)" på denne måten.

Tilslutt defineres intepretasjonen av predikatet "Avst(z,x,y,w)" slik:

(7) M(Avst(z,x,y,t)) = (x,yêReellX{0} & Abs((x);1–(y);1) =zêReell & wêReell^2)

Med denne tolkningen blir også avstandsrelasjonen mellom tidspunktene helt rigid og endres ikke når man går fra en verden til en annen. La oss bemerke at vi i det følgende vil skrive "Reell^2" istedet for det mer klumsete og lengere uttrykket "ReellXReell". Vi bemerker også at det er hensikten at

ReellU(ReellX {0}) – ReellX{0} skal representere de mulige individene i modellen som ikke er tidspunkter. Merk at man har at ReellΩ(ReellX{0}) =ø.

Slik M nå er definert er det temmelig enkelt å verifisere at de tidsteoretiske aksiomene i Rest(E;2,L;0) holder i M. Dette innebærer at vi har:

M(EpUE1)êTh(ZFC)

I denne forbindelse bør man huske på at EpUE2 ikke er noe aksiom i Rest(E;2,L;0) fordi EpUE2 ikke er noen formel i L;0.

Det er også klart at alle de mengdeteoretiske aksiomene i Rest(E;2,L;0) holder i M. Dette gjelder åpenbart for alle de rent mengdeteoretiske aksiomene som er formler i L;ê. For er F et slikt aksiom har man M(F)=F i lys av Lemma 1.2 i §1. Er imidlertid G = (Ey)(Ax) (xêy <–> (xêz &F)) en instans av utsondrings-aksiomet i L;0 som ikke er med i L;ê har man som man lett ser fra konstruksjonen av modellen M at

M(G) = (Ey)(Ax)(xêy <–> (xêz &M(F))) der M(F)êFm(L;ê). M(G) må derfor være en instans av utsondringsaksiomet i L;ê og man må derfor ha M(G)êTh(ZFC). Tilsvarende overlegninger viser at substitusjonsaksiomet holder i modellen M.

Vi kan derfor konkludere med at M, så langt som vi inntil nå har definert den, er en modell for (a) de mengdeteoretiske aksiomene, (b) de rent ontologiske aksiomene og (c) de tidsteoretiske aksiomene i Rest(E;2,L;0).

La oss så se på tolkningen av de predikatene som har med enkelhet å gjøre. Det dreier seg om predikatene (1.18) "Enk(x,y,w)" og (1.19) "LEnk(x,y,w)" på listen gitt i §2. Vi definerer først q(n) ved:

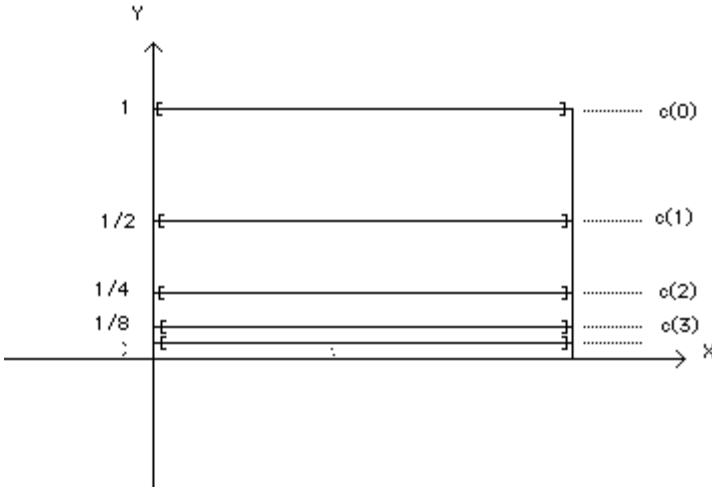
$$q(n) = \sum/i,0,n/(1/2\hat{}n) \quad (n \geq 0)$$

Dernest setter vi:

$$c(n) = Mg(\langle x,y\rangle: x \hat{e} [0,1] \ \& \ y = (2 - q(n)) \qquad (n \geq 0)$$

Figuren 2.1.1 viser hvilke punkter i planet (Reell^2) som representeres av c(n) for nêN:

Figur 2.1.1



c(0) er altså linjestykket fra 0 til 1 som ligger parallellt med X-aksen og i en avstand 1 over denne. Tilsvarende for c(1), c(2),... etc. Vi definerer C ved: C = UN/nêN/(c(n)) og setter C* = Reell^2–C. Siden man har at f.eks. "xêC" uttrykt i primitiv notasjon er en formel i L;ê har man naturligvis at M(xêC) = xêC. Tilsvarende må man ha M(xêc(n)) = xêc(n) og at M(x=q(n)) = (x=q(n)).

Vi definerer nå tolkningene av "Enk(x,y,w)" og "LEnk(x,y,w)" ved:

(8) M(Enk(x,y,w)) =: [((x,yêC & (En)(Em)(m,nêN & n>m & xêc(m) &yêc(n))) v
(x,yê Reell^2 & xêC & ¬(yêC))) & wêReell^2]

M(Enk(x,y,w)) rangerer altså punktene i planet slik at alle punktene i C representerer enklere verdener enn dem utenfor C. Punktene i C er rangert innbyrdes derved at punktene i c(m) representerer enklere verdener enn dem i c(n) om n>m.

(9) M(LEnk(x,y,w)) =: (x,yêC* v (En)(nêN & x,yêc(n))) & wêReel^2

To punkter x,yêReell^2 representerer altså like enkle verdener dersom de enten begge ligger utenfor C eller begge hører med til c(n) for noe nêN. Det er nå en enkel øvelse å verifisere at <Mg(<x,y>: M(Enk(x,y,w))), Mg(<x,y>: M(LEnk(x,y,w)))> utgjør et preferanse-system for alle wêReell^2.

Det følger fra dette at M modellerer de to aksiomene EpUB1 og EpUB2.

Siden punktene i planet, dvs. Reell^2, representerer de mulige verdenene i modellen representerer de enkelte delmengder av Reell^2 utsagn i modellen. Mer nøyaktig har vi at de karakteristiske funksjonene til delmengdene av Reell^2 representerer utsagn i modellen.

La oss definere en del utsagnsmengder som vi vil bruke i forbindelse med den konstruksjonen av M. Det bør understrekes at våre valg på dette punkt er svært vilkårlig. Man kunne ha plukket ut andre utsagsmengder som kunne ha vært like formålstjenelige.

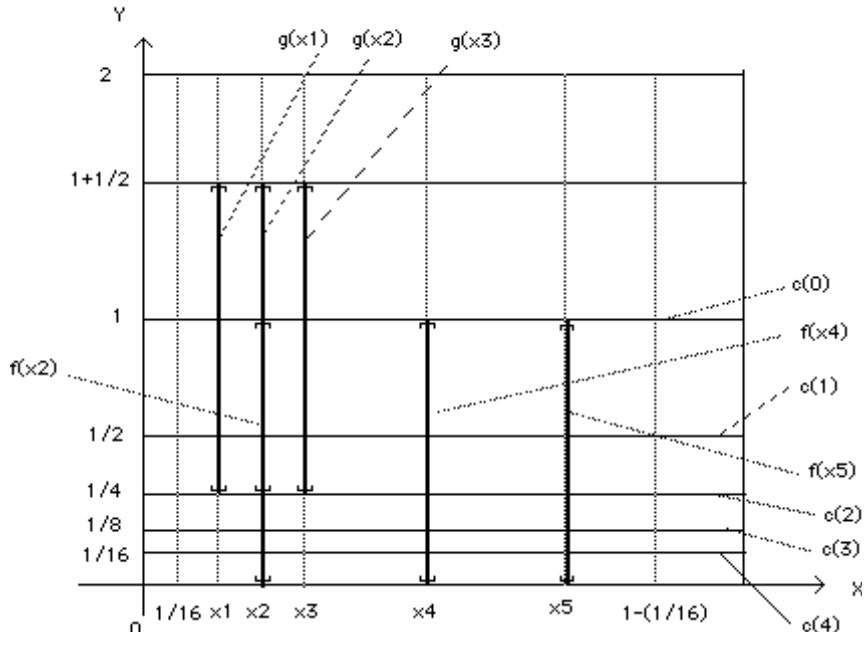
Vi setter:

f(x) = Mg(<x,z>: zêReell & 0≤z≤1)
g(x) = Mg(<x,z>: zêReell & (1/4)≤ z≤ (1+1/2))

For xêReell representerer f(x) et linjestykke som er parallelt med Y-aksen i en avstand på x i fra denne og som strekker seg fra punktet <x,0> til <x,1>. Tilsvarende representerer g(x) et linjestykke som går parallelt med y-aksen og som starter i punktet <x,1/4> og som strekker seg oppover til punktet <x,3/2>. I det følgende vil vi skrive μ(x) i stedet for det mer kompliserte uttrykket c;-1(x, Reell^2). μ(x), når x Inkl Reell^2 er da den karakteristiske funksjonen til x med hensyn på Reell^2. Det bør i denne forbindelse nevnes at man har M(xê(2^I)) = xê(2^(Reell^2)). Figur 2.1.2 på neste side gir en et anskuelig bilde av de punktmengdene som vi hittil har definert.

På figuren har vi avmerket c(0) – c(4) samt g(x) for visse tall x1 – x3 ê[0,1]. Videre har vi antydet f(x) for x2,x3,x4ê[0,1]. Antar man, noe som figuren antyder at x1<x2<x3<....<x5, så har man naturligvis at f.eks. f(x4)Ωf(x5)=ø mao. er utsagnene μ(f(x4)) og μ(f(x5)) ikke begge sanne i noen logisk mulig verden. Tilsvarende ser man at utsagnene representert ved μ(g(x1)) og μ(g(x2)) er uforenelige siden g(x1)Ωg(x2)=ø. Det skulle også være klart at alle utsagnene som svarer til elementene i M(g(x): xê{x1,x2,x3}) og i Mg(f(x): xê{x2,x4,x5}) er kontingente. Dette innebærer at de er sanne i noen verdener og usanne i andre. F. eks. er f(x4) usant i verdenen representert ved punktet <x4, -(1+1/4)> og sant i verdenen representert ved punktet <x4,1>.

Figur 2.1.2



Før vi går videre bemerker vi at vi setter p0 =0 og at a0 = <0,1>. Det er meningen at a0 skal representere den aktuelle verden i modellen og at p0 skal representere et oppfattende subjekt i

modellen som kan se, høre, erindre, vite og tro noe. Faktisk er dette det eneste objektet i denne modellen som har denne egenskapen.

Vi forsetter nå konstruksjonen av modellen M og definerer M for "Ser(x,y,t,w)" på følgende vis:

(10) M(Ser(x,y,t,w)) =: <x,y,t,w>êMg(<μ(c(0)Uf(x)),p0,<x,0>,a0>: xê[0,1])

Videre definerer vi M for predikatet Hør ved:

(11) M(Hør(x,y,t,w)) =: <x,y,t,w>êMg(<μ(c(0)Ug(x)),p0,<x,0>,a0>: xê[0,1])

Vi definerer M for VS slik:

(12) M(VS(x,y,t,w)) =: M(Ser(x,y,t,w)) v M(Hør(x,y,t,w)) =
<x,y,t,w>êMg(<μ(c(0)Uf(x)),p0,<x,0>,a0>: xê[0,1]) v
<x,y,t,w>êMg(<μ(c(0)Ug(x)),p0,<x,0>,a0>: xê[0,1])

Definisjonen av M(Er(x,y,t,w)) er noe mer komplisert:

(13) M(Er(x,y,t,w)) =: <x,y,t,w>êMg(<μ(c(0)Uf(x)),p0,<x+1/16,0>,a0>: xê[0,1]) v
<x,y,t,w>êMg(<μ(c(0)Ug(x)),p0,<x+1/16,0>,a0>: xê[0,1])

I modellen er det altså slik at p0 ved tidspunktet <x+(1/16),0> i verdenen a0 husker det vedkommende så eller hørte ved det tidligere tidspunktet <x,0>.

Vi må definere M(Kntr(x,y,t,w)) på en slik måte at denne relasjonen blir lukket under negasjon. Derfor setter vi:

(14) M(Kntr(x,y,t,w)) =: M(Ser(x,y,t,w)) v M(Hør(x,y,t,w)) v
<x,y,t,w>êMg(<μ(Reell^2–z),y',t',w'>: M(Ser(x,y,t,w)) v M(Hør(x,y,t,w)))

Merk at denne definisjonen gir mening siden M(Ser(x,y,t,w)) og M(Hør(x,y,t,w)) er definert tidligere. Som man ser fra (14) har man, om man skriver "Kntr;M(x,y,t,w)" i stedet for "M(Kntr(x,y,t,w))" at:

Kntr;M(x,y,t,w) –> Kntr;M(μ(Reell^2–x),y,t,w)

Dette er som det bør være siden μ(Reell^2–x) i modellen M representerer negasjonen av x dersom x er et utsagn i modellen, ie et element i 2^(Reell^2).

I lys av konstruksjonen av M ser man nokså lett at EpD1 og EpD2 holder i M, med andre ord at man har M(EpD1), M(EpD2)êTh(ZFC).

For å kunne definere M på en slik måte at EpUD3 også holder finner vi det hensiktsmessig å innføre de følgende to hjelperelasjoner i det vi setter vilkårlig per definisjon w1 = <10,11> og w2= <12,13>. Hjelperelasjonene er da definert slik:

e1 = Mg(<μ(c(0)Uf(x)),p0,<x+(1/8),0>,w1>: xê[0,1]) U
Mg(<μ(c(0)Ug(x)),p0,<x+(1/8),0>,w1>: xê[0,1])

og ved:

e2 = Mg(<μ(Reell^2– c(0)Uf(x)),p0,<x+(1/8),0>,w2>: xê[0,1]) U
Mg(<Reell^2– μ(c(0)Ug(x)),p0,<x+(1/8),0>,w2>: xê[0,1])

Vi kan så fortsette konstruksjonen av M i det vi setter:

(15) M(Evid4(x,y,t,w)) =: M(Ser(x,y,t,w)) v M(Hør(x,y,t,w)) v
M(Er(x,y,t,w)) v <x,y,t,w>ê(e1Ue2)

Med denne definisjonen av M(Evid4(x,y,t,w)) er det ganske lett å se at Val;M(EpUD3). En detaljert verifikasjon av dette kan overlates til leseren. Vi fastlegger intepretasjonen av predikatet Evid3(x,t,w) slik:

(16) M(Evid(x,t,w)) =: (Ey)(<x,y,t,w>êMg(<x',y',t',w'>: M(Evid4(x',y',t',w'))))

De følgende stipulasjoner fastlegger intepretasjonen av TEvid4, TEvid3 og TEvid2:

(17) M(TEvid4(x,y,t,w)) =: x = μ(SN(Mg(μ;-1(z): M(Evid4(z,y,t,w)))))
(18) M(TEvid3(x,t,w)) =:
x= μ;-1[SN(UN/yêP/(Mg(μ;-1(z): M(TEvid4(z,y,t,w)))))]
der P = ReellU(ReellX{0}
(19) M(TEvid2(x,w)) =:
x = μ[SN(UN/têReelX{0}/(Mg(μ;-1(x): M(TEvid3(x,t,w)))))]

Er x en delmengde av Reell^2, som representerer klassen av alle mulige verdener i vår modell, er μ(x) den karakteristiske funksjonen til x med hensyn på Reell^2. Er på den annen side xê2^(Reell^2), mao er x en entitet som representerer et utsagn i modellen, bruker vi μ;-1(x) for å betegne klassen av de mulige verdener i modellen hvor utagnet x er sant. Man har μ;-1(x) = Mg(z: zêReell^2 & x(z)=1) om xê(2^(Reell^2)).

Vi har ennå ikke definert M for "TEvid2(x,w)". Vi definerer først "EC" og "DC(x)" ved:

EC = Mg(<w,x>: (Ey)(Et)(M(Evid4(x,y,t,w))))
DC(x) = Mg(z: zê(2^(Reell^2)) & SN(Mg(μ;-1(u): uêx)) Inkl μ;-1(z))

"DC(x)" kan leses "den deduktive lukningen av x". Definisjonen er bare anvendbar om x Inkl (2^(Reell^2)).

Gitt disse definisjonene kan vi sette:

(20) M(Evid2(x,w)) =: wêReell^2 & xêDC(Mg(r: <w,r>êEC))

Vi setter videre:

(21) M(Vet(x,y,t,w)) =: M(Ser(x,y,t,w))v M(Hør(x,y,t,w)) M(Er(x,y,t,w)) v
<x,y,t,w>êMg(<μ(c(0)Uc(1)U{z}),p0,<(z);2–2,0>,a0>: zê{0}X[2,3])

Videre setter vi:

(22) M(Tror(x,y,t,w)) =: M(Vet(x,y,t,w))
(23) M(DEvid2(x,w)) =: M(Evid2(x,w))
(24) M(DEvid4(x,y,t,w)) =: M(Evid4(x,y,t,w))

La oss så sette:

q(w) = Mg(<x,y>: M(LEnk(x,y,w)) v M(Enk(x,y,w)))

Vi fastsetter så tolkningene av predikatene "Bør(x,y,w)" og "BørA(x,y,w)". Dette skjer ved de følgende stipulasjoner:

(25) M(Bør(x,y,w)) =: x,yê(2^(Reell^2) & wêReell^2 & Max(q(w), μ;-1(y)) Inkl μ;-1(x)
(26) M(BørA(x,y,w)) =: x,y Inkl (2^(Reell^2)) & wêReell^2 & Max(q(w), SN(Mg(μ;-1(u):uêy))) Inkl SN(Mg(μ;-1(u):uêx))

Dermed har vi faktisk gitt en fullstendig definisjon av intepretasjonen MêI(L;0,L;ê). Det gjenstår nå å verifisere at de ikke-logiske aksiomene i teorien Rest(E;t,L;0) faktisk holder i M. Dette vil bli gjort i den neste paragrafen.

Imidlertid kan det være på sin plass å fremsette visse bemerkninger og forbehold for å unngå misforståelser:

(i) Modellen, eller den mengdeteoretiske intepretasjonen M, er av en helt abstrakt natur. Vi mener selvfølgelig ikke at den på noen som helst måte representerer den naturlige modellen for L;0. Det skulle være ganske klart at M verifiserer en lang rekke setninger i L;0 som man åpenbart vil forkaste ut fra rimelige eller normale tolkninger av L;0.

(ii) Når man konstruerer modeller for Rest(E;0,L;0) av den typen som er blitt innført her, har man forholdsvis stor frihet. Vi kunne ha konstruert en rekke modeller M1, M2, M3,... etc. som avviker fra M. Det er for eksempel nokså vilkårlig at vi har valgt Reell^2 til å representere de mulige verdenene i M. Vi kunne ha valgt Reell^3, eller Reell^n for noe nêN, eller en eller annen endelig mengde.

(iii) Det hevdes naturligvis ikke at M er den eneste modellen for Rest(E;2,L;0) eller den mest interessante. En slik påstand ville åpenbart være fullstendig absurd. M er primært konstruert med det formål for øye å bevise at Rest(E;2,L;0) er konsistent relativt t ZFC. Dessuten har vi ønsket å vise – in concretio – hvordan man kan konstruere modeller av denne typen, og hvordan de kan brukes for å oppnå resultater om konsistens og uavhengighet i forbindelse med teorier av den typen vi har formulert i denne avhandlingen.

§2.2 Bevis for at M er en modell for Rest(E:2,L:0).

Vi har allerede antydet at de ontologiske og mengdeteoretiske aksiomene i T;A* som lar seg uttrykke i L;0 holder i modellen M. Vi kan derfor sies å ha bevist:

Teorem 2.2.1 (AF)(FêTh(Rest(T;A*,L;0). –> Val;M(F))

Videre har vi også antydet at den følgende sats holder:

Teorem 2.2.2 Er S en av formlene EpUE1, EpUD1, EpUD2 eller EpUD3 i L;0 har man at Val;M(S).

Det er imidlertid en rekke andre aksiomer i Rest(E;2,L;0) som man også temmelig lett ser at må holde i modellen M. Dette gjelder EpA1, EpA4, EpA5, EpA6, EpA7, EpA8 og EpA10. Det skulle også være mulig å innse forholdsvis raskt, om man studerer kontruksjonen av M omhyggelig, at EpA14 og EpA15 holder. Vi kan derfor sies å ha godtgjort:

Teorem 2.2.3 Er S en av formlene EpA1, EpA4, EpA5, EpA6, EpA7, EpA8, EpA10, EpA14 eller EpA15 har man at Val;M(S).

De eneste evidensteoretiske aksiomene som derfor krever mer omtanke er følgelig: EpA2, EpA3, EpA9, EpA13, EpA16 og EpA17. Vi vil bevise at de holder i M nedenfor.

Ser man på de akseptanseteoretiske aksiomene, EpB-aksiomene, er det nærmest trivielt at EpB1 og EpB2 holder:

Teorem 2.2.4 Man har Val;M(EpB1) & Val;M(EpB2)

Man bør merke seg at EpB3, EpB4 ikke er formler i L;0. Disse aksiomene kommer derfor ikke i betraktning her.

Av de epistemisk/doxastiske aksiomene er EpC1 uproblematisk. Man har altså:

Teorem 2.2.5 Val;M(EpC1)

De aksiomene i Rest(E;2,L;0) som gjenstår og som trenger omhyggelig gransking er derfor EpC3, EpC5 og EpC6. Kan vi derfor vise at de problematiske evidensteoretiske aksiomene som ble nevnt ovenfor, samt at EPC3, EpC5 og EpC6 holder i M, vil vi ha gitt et bevis for vår hovedpåstand, nemlig:

Teorem 2.2.6 (Hovedteorem) Val;M(Rest(E;2,L;0)

Blandt de aksiomene som vi nå må ta sikte på å verifisere at er gyldige i M er det særlig EpC5 som byr på mest tankearbeid. For å vise gyldigheten til denne formele har vi funnet det hensiktsmessig å gi bevis for en rekke hjelpesetninger. Først innfører vi imidlertid noen hjelpebegreper:

K1 = Mg(c(0)Uf(x): xê[0,1])
K2 = Mg(c(0)Ug(x): xê[0,1])
K3 = Mg(Reell^2–(c(0)Uf(x)): xê[0,1]) U Mg(Reell^2–(c(0)Uf(x)): xê[0,1])

Videre defineres"r;1(x)" og "r;2(x)" ved:

r;1(x) = {c(0)Uf(x), c(0)Ug(x)}
r;2(x) = {c(0)Uf(x), c(0)Ug(x), c(0)U f(x–(1/16)), c(0)Ug(x–(1/16))}

Det følgende lemma er viktig for den videre bevisførselen:

Lemma 2.2.7 M(Evid4(x,y,t,w)) <–>
[(Ez)(<y,t,w>ê{<p0,<z,0>,a0>} & zê[0,1] &
(x= μ(c(0)Uf(z)) v x= μ(c(0)Ug(z)))) v
(Ez)(<y,t,w>ê{<p0,<z+(1/16),0>,a0>} & zê[0,1] &
(x= μ(c(0)Uf(z)) v x= μ(c(0)Ug(z)))) v
(Ez)(<y,t,w>ê{<p0,<z+(1/8),0>, w1>} & zê[0,1] &
(x= μ(c(0)Uf(z)) v x= μ(c(0)Ug(z)))) v
(Ez)(<y,t,w>ê{<p0,<z+(1/8),0>,w2>} & zê[0,1] &
(x= μ(Reell^2–c(0)Uf(z)) v x= μ(Reell^2–(c(0)Ug(z)))))]

Bevis: Satsen følger umiddelbart fra definisjonen av M(Evid4(x,y,t,w)), M(Ser(x,y,t,w)), M(Hør(x,y,t,w)) og M(Er(x,y,t,w)), samt definisjonene av e1 og e2. Man konsulterer i denne forbindelse klausulene (10), (11) og (15) i definisjonen av M i §2.1. **Q.E.D.**

Lemma 2.2.8 M(Evid4(x,y,t,w)) –>. y= p0 & wê{a0,w1,w2}

Bevis: Man bruker Lemma 2.2.7. **Q.E.D.**

Lemma 2.2.9 (i) xê[0,1/16> –>
Mg(y: M(Evid4(y,p0,<x,0>,a0))) = Mg(μ(w): wêr;1(x))
(ii) xê[1/16,1] –>
Mg(y: M(Evid4(y,p0,<x,0>,a0))) = Mg(μ(w): wêr;2(x))
(iii) xê<1, 1+(1/16)] –>
Mg(y: M(Evid4(y,p0,<x,0>,a0))) = Mg(μ(w): wêr;1(x))

Bevis: Man benytter Lemma 2.2.7 og definisjonene av r;1(x) og r;2(x). **Q.E.D.**

Det følgende lemma bevises ved hjelp av Lemma 2.2.9:

Lemma 2.2.10
(i) xê[0,1/16> –>
M(TEvid4(y,p0,<x,0>,a0)) <–> y = c(0)UMg(<x,z>: (1/4)≤z≤1)
(ii) xê[1/16,1] –>
M(TEvid4(y,p0,<x,0>,a0)) <–> y = μ(c(0))
(iii) xê<1, 1+(1/16)] –>
M(TEvid4(y,p0,<x,0>,a0)) <–> y = c(0)UMg(<x,z>: (1/4)≤z≤1)
(iv) xê[0, 1+(1/16)] –>
M(TEvid3(y,<x,0>,a0)) <–> M(TEvid4(y,p0,<x,0>,a0))
(v) M(TEvid2(y,a0)) <–> y=μ(c(0))

Bevis: Setningen følger ved hjelp av Lemma 2.2.9 samt definisjonene av M for predikatene TEvid2, TEvid3 og TEvid4 i det man har:
SN(Mg(w: wêr;1(x)) = c(0)UMg(<x,z>: (1/4)≤z≤1) og
SN(Mg(w: wêr;2(x)) = c(0)
Disse to påstandene ser man lett at holder i kraft av definisjonene av r;1(x), r;2(x), f(x) og g(x). **Q.E.D.**

Lemma 2.2.11

(i) xê[1/8, 1+(1/8)] –>
Mg(y: M(Evid4(y,p0,<x,0>,a0))) =
{μ(c(0)Uf(x–(1/8))), μ(c(0)Uf(x–(1/8)))}

(ii) xê[1/8, 1+(1/8)] –>
Mg(y: M(Evid4(y,p0,<x,0>,w1))) =
{μ(Reell^2–c(0)Uf(x–(1/8))), μ(Reell^2–c(0)Uf(x–(1/8)))}

(iii) xê[1/8, 1+(1/8)] –> .
M(TEvid4(y,p0,<x,0>,w2)) <–> M(TEvid3(y,<x,0>,w2) <–>
y= μ(Reel^2 –(c(0)Uf(x–(1/8)) Ug(x–(1/8))))

(iv) xê[1/8, 1+(1/8)] –> .
M(TEvid4(y,p0,<x,0>,w1)) <–> M(TEvid3(y,<x,0>,w1) <–>
y= μ(c(0)U Mg(<x–(1/8),z>: zê[1/4,1]))

(v) M(TEvid2(y,w2)) <–>.
y= μ(SN/xê[1/8,1+(1/8)]/(Reel^2 –(c(0)Uf(x–(1/8)) Ug(x–(1/8)))))
<–> y = μ[Reel^2 – (c(0)U Z(x))] der man har at
Z(x) = UN/xê[1/8,1+(1/8)]/(f(x–(1/8)) Ug(x–(1/8)))

Bevis: Man benytter Lemma 2.2.7 samt definisjonen av M for predikatene TEvid4, TEvid3 og TEvid2. **Q.E.D.**

Man har åpenbart at:
UN/xê[1/8,1+(1/8)]/(f(x–(1/8)) Ug(x–(1/8))) = UN/xê[0,1]/(f(x)Ug(x)).
I lys av definisjonene av f(x) og g(x) har man også:
UN/xê[0,1]/(f(x)Ug(x)) = [0,1]X[0, (3/2)]. Videre er det ikke vanskelig å se at c(0) Inkl [0,1]X[0, (3/2)]. Fra Lemma 2.2.11, siste punkt, følger derfor:

Lemma 2.2.12 M(TEvid2(y,w2)) <–> y = μ(Reell^2 – [0,1]X[0, (3/2)])

Fra Lemma 2.2.11, punkt (iv), har man:

Lemma 2.2.13 M(TEvid2(y,w1)) <–> y=μ(c(0))

Bevis: Man har:
M(TEvid2(x,w1) <–>
μ;-1(y) = SN(UN/têReellX{0}/(Mg(μ;-1(x): M(TEvid3(x,t,w1)))))
<–> μ;-1(y) = SN/xê[1/8, 1+(1/8)]/(c(0)U Mg(<x–(1/8),z>: zê[1/4,1]))
<–> μ;-1 = c(0). **Q.E.D.**

Lemma 2.2.14 wêReell^2 & ¬(wê{a0,w1,w2}). –>
M(TEvid2(y,w)) <–> y =μ(Reell^2).

Bevis: Hvis wêReell^2 og ¬(wê{a0,w1,w2}) har man i lys av Lemma 2.2.8 at ¬(Ey)(Et)(Ex)(M(Evid4(y,x,t,w))). I kraft av konstruksjonen av M, klausul (17), (18) og (19) i §2.1 impliserer dette at:

SN(UN/têReellX{0}/(Mg(μ;-1(z): M(TEvid3(x,t,w)))) = Reell^2. Satsen følger fra dette og (19). **Q.E.D.**

Det bør bemerkes at snitt og union-operatorene SN og UN også kan innføres i forbindelse med delmengder av 2^(Reell^2). Er X Inkl 2^(Reell^2) er SN(X) og UN(X) definert ved:

SN(X) = μ(Mg(z: zêReell^2& (Ay)(yêX –> y(z) =1))

UN(X) = μ(Mg(z: zêReell^2& (Ey)(yêX & y(z) =1))

Bruker man disse definisjonene ser man at SN(ø) = μ(Reell^2). Ovenfor har vi ikke forutsatt disse definisjonene av SN og UN. SN(X) og UN(X) har ovenfor bare blitt brukt på vanlig måte, dvs. vi har forutsatt at X er en famiele av mengder og ikke en familie av karakteristiske funksjoner med hensyn på Reell^2, eller for en saks skyld noen annen mengde.

Fra Lemma 2.2.10 (v) og Lemma 2.2.12 – Lemma 2.2.14 følger:

Lemma 2.2.15

(i) (Aw)(wêReell^2 –> (E!y)(yê(2^(Reell^2)) & M(TEvid2(y,w))))

(ii) (Aw)(wêReell ^2 –>
(Ez)(zêReell^2 & (iy)(yê(2^(Reell^2)) & M(TEvid2(y,w)))‘z =1)

Fra dette lemma følger så:

Teorem 2.2.16 Val;M(EpUA2)

På samme måte som man innser at Lemma 2.2.14 holder innser man:

Lemma 2.2.17 wêReell^2 & ¬(wê{a0,w1,w2}). –>
(i) M(TEvid4(x,y,t,w)) <–> x =μ(Reell^2)
(i) M(TEvid3(x,t,w)) <–> x =μ(Reell^2)

Bevis: Beviset overlates til leseren. **Q.E.D.**

Lemma 2.2.10, Lemma 2.2.11 og Lemma 2.2.17 har man:

Lemma 2.2.18 (Aw)(wêReell^2 &
(M(TEvid4(x,y,t,w))v M(TEvid3(x,t,w))) –>(Ez)(zêReell^2 & x(z)=1))

Et korollar til denne hjelpesetningen er den følgende sats:

Teorem 2.2.19 Val;M(EpA9)

Detbør bemerkes at EpA3 følger fra EpA16. Man behøver derfor bare å verifisere EpA16 i M.

Det skulle ikke være spesielle vanskeligheter forbundet med å innse på basis av definisjonen av M for predikatet Evid2 at EpA13 holder. Man har derfor:

Teorem 2.2.20 Val;M(EpA13)

Bevis: Det overlates til leseren å sjekke dette. **Q.E.D.**

Fra definisjonen av EC og Lemma 2.2.7 fremgår det at:

EC"{a0} = Mg(μ(x): xêK1UK2)
EC"{w1} = Mg(μ(x): xêK1UK2)
EC"{w2} = Mg(μ(x): xêK3)

Nå har man, og også dette er nokså åpenbart, at:

SN(K1UK2) = c(0)
SN(K3) = Reell^2 – ([0,1]X[0,3/2])

Det følger derfor i lys av Lemma 2.3.10 (v), Lemma 2.2.12, Lemma 2.2.13 og (20) i §2.1 at:

Lemma 2.2 21 (Aw)(wê{a0,w1,w2} –>.
M(TEvid2(y,w)) <–> y = μ(SN(Mg(μ;-1(x): M(Evid2(x,w)))))

Nå har vi om ¬(wê{a0,w1,w2} & wêReell^2 at
SN(Mg(μ;-1(x): M(Evid2(x,w)))) = Reell^2. Ved hjelp av Lemma 2.2.21 og Lemma 2.2.14 har man derfor:
(Aw)(wêReell^2 –>
M(TEvid2(y,w)) <–> y = μ(SN(Mg(μ;-1(x): M(Evid2(x,w))))))

Fra dette følger:

Teorem 2.2.22 Val;M(EpA16)

Fra Lemma 2.2.10 (v), Lemma 2.2.12 – 2.2.14 følger det at dersom M(TEvid2(y,w)) der wêReell^2 så er y enten μ(c(0)) eller μ(Reell^2 –[0,1]X[0,3/2]) eller μ(Reell^2)). I alle tilfelle har man at Max(q(w), μ;-1(y))≠ø

Videre ser man fra Lemma 2.2.10 og Lemma 2.2.11 at hvis M(TEvid3(y,<x,0>,w) holder så har man at μ;-1(y) er en av de følgende mengder:

(i) c(0) U Mg(<x,z>: (1/4)≤ z ≤ 1)
(ii) c(0)
(iii) c(0) U Mg(<x–(1/8),z>: zê[1/4,1])
(iv) Reell^2 – (c(0) U f(x–(1/8))U g(x–(1/8))
(v) Reell^2

I alle disse tilfellene har man at Max(q(w),μ;-(y))≠ø. Dette viser at følgende sats holder:

Teorem 2.2.23 Val;M(EpA17)

Det gjenstår nå bare å vise at EpC3, EpC5 og EpC6 holder i M. Siden EpC3 er implisert av EpC5 er det tilstrekkelig å verifisere EpC5 og EpC6.

Det er imidlertid lett å se at EpC6 holder i lys av bemerkningene rett ovenfor:

Teorem 2.2.24 Val;M(EpC6)

Vi innskrenker oss derfor til å se på EpC5.

De to neste hjelpesetningene er vesentlige i forbindelse med beviset for at EpC5 er gyldig i M:

Lemma 2.2.25 Anta xê[0,1] og y Inkl K1UK2U K3. Anta videre at r;1(x) Inkl y og at SN(y)≠ø. Da gjelder at en av følgende tre ting holder:

(i) SN(y) = c(0)
(ii) SN(y) = c(0) U Mg(<x,z>: zê[1/4,1>)
(iii) SN(y) = Mg(<x,z>: zê[1/4,1>)

Bevis: Anta (1) xê[0,1] & y Inkl UN/i,1,3/(Ki) & r;1(x) Inkl y & SN(y)≠ø. Det må da finnes a1,a2,a3 slik at (2) ai Inkl Ki for i=1,2,3 og der man har (3) y = a1Ua2Ua3. Videre må man ha at (4) SN(y) = SN(a1Ua2)ΩSN(a3). I kraft av definisjonen av Ki'ene, r;1 og (3) har man (5) r;1(x) Inkl (a1Ua2). Vi betrakter to tilfeller:

Tilfelle (i): r;1(x) = a1Ua2. Da har man:

(6) SN(a1Ua2) = SN(r;1(x))
= SN({c(0)Uf(x),c(0)Ug(x)})
= (c(0)Uf(x)) Ω (c(0)Ug(x))
= c(0)U(f(x)Ωg(x))
= c(0)U Mg(<x,z>: zê[1/4,1>)

Tilfelle (ii): r;1(x) SInkl a1Ua2. Vi sondrer da mllom to undertilfeller:

Tilfelle (ii.a): Cd((a1Ua2) – r;1(x)) ≥2. Da må det finnes distinkte y1,y2 slik at y1,y2ê(a1Ua2)–r;1(x)). Har man at y1,y2êa1 følger det at det finnes distinkte z1,z2ê[0,1]–{x} slik at y1= c(0)Uf(z1) og y2=c(0)Uf(z2). Men fra dette følger at SN((a1Ua2) – r;1(x)) Inkl SN{y1,y2} = c(0) siden f(z1)Ωf(z2)=ø om z1≠z2 og z1,z2ê[0,1]. Har man y1êa1 og y2êa2 følger det igjen at det må finnes distinkte z1,z2 der z1,z2ê[0,1]–{x} slik at y1= c(0)Uf(z1) og y2=c(0)Ug(z2). Men i dette tilfelle har man også SN((a1Ua2) – r;1(x)) Inkl SN{y1,y2} = c(0) siden f(z1)Ωg(z2)=ø om z1≠z2 og z1,z2ê[0,1]. Er y1êa2 og y2êa1 resonnerer man på akkurat samme måte. Er endelig y1,y2 êa2 følger det at det finnes distinkte z1,z2ê[0,1]–{x} slik at y1= c(0)Ug(z1) og y2=c(0)Ug(z2). Men fra dette følger at

SN((a1Ua2) – r;1(x)) Inkl SN{y1,y2} = c(0) siden g(z1)Ωg(z2)=ø om z1≠z2 og z1,z2ê[0,1]. Vi har altså i alle tilfelle at:

(7) SN((a1Ua2) – r;1(x)) Inkl c(0)

Anta for vilkårlig z at zêc(0). Vi ønsker å vise at zêSN((a1Ua2) – r;1(x)) og derfor at (+) (Ay)(yê((a1Ua2) – r;1(x)) –> zêy). Anta derfor for vilkårlig y at yê((a1Ua2) – r;1(x)). Da har man enten at y = c(0)Uf(u) for noe uê[0,1] eller ar y=c(0)Ug(v) for noe vê[0,1]. i begge tilfelle må det være slik at zêc(0) Inkl y og derfor at zêy. Dette viser at (+) holder om z er et vilkårlig element i c(0). Det følger at c(0) Inkl SN((a1Ua2) – r;1(x)). Dette og (7) viser at man har:

(8) SN((a1Ua2) – r;1(x)) = c(0)

Tilfelle (ii.b) Cd((a1Ua2)–r;1(x))= 1. Da har man (a1Ua2)–r;1(x) ={y} for noe y. Er yêa1 følger at det finnes zê[0,1]–{x} slik at y=c(0)Uf(z). I dette tilfellet har man derfor SN((a1Ua2)–r;1(x)) = SN({y})= c(0)Uf(z) Er yêa2 følger at det finne z der zê[0,1]–{x} slik at y= c(0)Ug(z). I såfall har man

SN((a1Ua2)–r;1(x)) = SN({y})= c(0)Ug(z).

I begge disse to tilfellene har man

SN(a1Ua2) = SN((a1Ua2) – r;1(x))Ω SN(r;1(x)) = c(0)

I begge de to tilfellene (i) og (ii) har man:

(9) SN(a1Ua2)=c(0) v SN(a1Ua2) = c(0)U Mg(<x,z>: zê[1/4,1>)

Vi betrakter nå a3 og sondrer mellom to hovedtilfeller.

Tilfelle(i): a3=ø. Da har man SN(a1Ua2Ua3) = SN(a1Ua2). Siden y = a1Ua2Ua3 følger i lys av (9) at

SN(y) = c(0) v SN(y) = c(0)U Mg(<x,z>: zê[1/4,1>). Satsen holder derfor i dette tilfellet.

Tilfelle (ii): a3≠ø. Siden a3 Inkl K3 følger det at det finnes u1,u2 og I;1, I;2 med de følgende egenskaper:

(11) a3 = u1Uu2 & I;1, I;2 Inkl [0,1]

(12) u1 = Mg(Reell^2 –(c(0)Uf(z)): zêI;1)

(13) u2 = Mg(Reell^2 –(c(0)Ug(z)): zêI;2)

Vi skiller mellom tre undertilfeller:

Tilfelle (ii.a): u2 =ø. Da har man:

(14) SN(a3) = SN(u1) = SN(Mg(Reell^2 –(c(0)Uf(z)): zêI;1))
= Reell^2 – (c(0)U UN/zêI;1/(f(z))).

Nå kan man ikke ha xêI;1. For var dette tilfelle måtte man ha at c(0)Uf(x) Inkl c(0)U UN/zêI;1/(f(z)) og følgelig i lys av (9) at:

SN(y) = SN(a1Ua2)Ω SN(a3) =ø . Men dette strider mot den siste konjunkten i (1). Fra (9) følger nå:

SN(y) = c(0)Ω Reell^2 – (c(0)U UN/zêI;1/(f(z)))
v SN(y) = (c(0)U Mg(<x,z>: zê[1/4,1>))Ω
Reell^2 – (c(0)U UN/zêI;1/(f(z)))

I denne disjunksjonen er den første disjunkten åpenbart utelukket. Det følger derfor at man har siden x ikke er med i I;1

SN(y) = (c(0)U Mg(<x,z>: zê[1/4,1>))Ω
Reell^2 – (c(0)U UN/zêI;1/(f(z))) = Mg(<x,z>: zê[1/4,1>)

Satsen holder derfor også i dette tilfellet.

Tilfelle (ii.b); u1=ø. Dette tilfellet blir helt analogt med det foregående. Man behøver bare å bytte ut u1,I;1 med u;2 og I;2. Også i dette tilfellet har man:

SN(y) = Mg(<x,z>: zê[1/4,1>)

Tilfelle (ii.c): u1≠ø og u2≠ø. Da har man:

SN(a3) = SN(u1Uu2) = Reell^2 – (c(0)U UN/zêI;1/(f(z))U UN/zêI;2/(g(z)))

I lys av (9) har man da om man setter

q= Reell^2 – (c(0)U UN/zêI;1/(f(z))U UN/zêI;2/(g(z))) at:

SN(y) = c(0)Ω q v SN(y) = c(0)UMg(<x,z>: zê[1/4,1>)

Den første disjunkten er her utelukket i kraft av den siste konjunkten i (1). Vi forutsetter at SN(y)≠ø. Men siden dette skal være tilfelle impliserer den andre disjunkten at SN(y) = Mg(<x,z>: zê[1/4,1>).

Man ser at satsen holder i alle tilfeller. Dermed har vi gitt et fullstendig bevis.
Q.E.D.

Lemma 2.2.26 xê[1/16,1] & y Inkl UN/i,1,3/(Ki) &
r;2(x) Inkl y & SN(y)≠ø. –> SN(y) = c(0)

Bevis: Anta (1) xê[1/16,1] & y Inkl UN/i,1,3/(Ki) & r;2(x) Inkl y & SN(y)≠ø. Fra definisjonene av r;1 og r;2 har vi: r;2(x) = r;1(x)U r;1(x–(1/16)). Fra dette og den tredje konjunkten i (1) følger at r;1(x) Inkl y og r;1(x–(1/16)) Inkl y. Dette, (1) og Lemma 2.2.25 impliserer:

(i) SN(y) = c(0) v SN(y) = c(0) U Mg(<x,z>: zê[1/4,1>) v

SN(y) = Mg(<x,z>: zê[1/4,1>) og

(ii) SN(y) = c(0) v SN(y) = c(0) U Mg(<x–(1/16),z>: zê[1/4,1>) v
SN(y) = Mg(<x–(1/16),z>: zê[1/4,1>)

Det blir ni tilfelle som må undersøkes. Går man gjennom disse tilfellene ser man at man i alle tilfellene har at SN(y) = c(0). **Q.E.D.**

Lemma 2.2.27

(i) Mg(z: (Ey)(Et)(Ew)(M(Evid4(x,y,t,w)))) = UN/i,1,3/(Ki)

(ii) (Ax)(xê[0, 1+(1/16)] –>.
M(TEvid4(y,p0,<x,0>,a0)) <–> (y = SN(Mg(μ(w): wêr;1(x))) v
y = SN(Mg(μ(w): wêr;1(x)))

Bevis: Satsen følger lett ved hjelp av Lemma 2.2.7 og Lemma 2.2.19. **Q.E.D.**

Lemma 2.2.28

(i) M(Vet(x,y,t,w)) –> y=p0 & (Ez)(zê[0,1+(1/16)] & t =<z,0>) & w=a0.

(ii) xê[0,1/16> –>.
M(Vet(y,p0,<x,0>,a0)) <–> (yêMg(μ(w): wêr;1(x)) v
y = c(0)Uc(1)U{<0,x+2>})

(ii) xê[1/16,1] –>.
M(Vet(y,p0,<x,0>,a0)) <–> (yêMg(μ(w): wêr;2(x)) v
y = c(0)Uc(1)U{<0,x+2>})

(ii) xê<1,1+(1/16)] –>.
M(Vet(y,p0,<x,0>,a0)) <–> (yêMg(μ(w): wêr;1(x)))

Bevis: Umiddelbar konsekvens av måten M(Vet(x,y,t,w)) er definert på. **Q.E.D.**

Vi vil nå bevise:

Teorem 2.2.29 Val;M(EpC5)

Bevis: For å godtgjøre dette er det helt tilstrekkelig å bevise:

(+) M(Vet(s,u,t,w)) & M(TEvid4(z,u,t,w)) –>
(Ar)(r Inkl UN/i,1,3/(Ki) & SN({μ;-1(z)}Ur)≠ø –>
Max(q(w), SN({μ;-1(z)}Ur)) Inkl μ;-1(s))

Vi vil derfor ta sikte på å bevise (+). Anta derfor

(1) M(Vet(s,u,t,w)) & M(TEvid4(z,u,t,w)) og dessuten

(2) r Inkl UN/i,1,3/(Ki) & SN({μ;-1(z)}Ur)≠ø.

Fra (1) følger t =<x,0> for xê[0,1+(1/16)]. Vi skiller mellom tre tilfeller:

Tilfelle (A): xê[0, 1/16>. Da har vi fra den andre konjunkten i (1) og Lemma 2.2.20 at z = SN(Mg(μ(w): wêr;1(x))). Setter vi nå y = r;1(x)Ur har vi:

(3) y Inkl UN/i,1,3/(Ki) siden r;1(x) Inkl UN/i,1,3/(Ki)

(4) r;1(x) Inkl y

(5) SN(y) = SN({μ;-1(z)}Ur)≠ø.

I følge Lemma 2.2.25 har vi da:

SN(y) = c(0) v SN(y) = c(0) U Mg(<x,z>: zê[1/4,1>) v
SN(y) = Mg(<x,z>: zê[1/4,1>)

Vi skiller mellom tre undertilfeller:

Tilfelle (A.1): SN(y)=c(0). Da har vi at:
Max(q(w), SN(y)) = Max(q(w), SN({μ;-1(z)}Ur) = c(0). Videre har man fra (1) siden xê[0, 1/16> i lys av Lemma 2.2.28 at:

sêMg(μ(w): wêr;1(x)) v s= c(0)Uc(1)U{<0,x+2>}) I begge tilfellene følger: Max(q(w), SN({μ;-1(z)}Ur)) Inkl μ;-1(s)).

Tilfelle (A.2): SN(y) = c(0) U Mg(<x,z>: zê[1/4,1>). Da har vi igjen i lys av definisjonen av q(w) at Max(q(w), SN(y)) = c(0) og derfor at Max(q(w), SN({μ;-1(z)}Ur)) Inkl μ;-1(s)).

Tilfelle (A.3): SN(y) = Mg(<x,z>: zê[1/4,1>). Siden xê[0, 1/16> har vi fra (1) ved hjelp av Lemma 2.2.28 at sêMg(μ(w): wêr;1(x)) v s= c(0)Uc(1)U{<0,x+2>}). I begge tilfellene har man:

Max(q(w),SN(y)) = Max(q(w), SN({μ;-1(z)}Ur)) Inkl μ;-1(s)

Man ser at stsen holder i alle undertilfellene (A.1) – (A.3). Den holder derfor i Tilfelle (A).

Tilfelle (B): xê[1/16,1]. Fra den andre konjunkten i (1) og Lemma 2.2.10følger da at z= SN(Mg(μ(w): wêr;2(x))). Setter man nå per definisjon y= r;2(x)Ur så har man:

(6) y Inkl U/i,1,3/(Ki) siden r;2(x) Inkl UN/i,1,3/(Ki) om xê[1/16,1]

(7) r;2(x) Inkl y

(8) SN({μ;-1(z)}Ur) = SN({μ;-1(z)})ΩSN(r)
= μ-1(z)ΩSN(r) = SN(r;2(x))ΩSN(r) = SN(y)≠ø

Ved hjelp av Lemma 2.2.26 har man da (9) SN(y)=c(0).

Siden Max(q(w),SN(y)) = Max(q(w),c(0)) = c(0) har vi: Max(q(w),SN({μ;-1(z)}Ur)) = c(0). Videre har vi i lys av (1) og Lemma 2.2.28, siden xê[1/16,1], at

sêMg(μ(w): wêr;2(x)) v s = c(0)Uc(1)U{<0,x+2>}) I begge tilfelle har man at: Max(q(w),SN({μ;-1(z)}Ur)) Inkl μ;-1(s). Satsen holder derfor i dette tilfellet.

Tilfelle (C): xê<1,1+(1/16)]. Fra den andre konjunkten i (1) og Lemma 2.2.9 følger da at z= SN(μ(w): wêr;1(x)). Setter man per definisjon y =r;1(x)Ur så har man som under Tilfelle (A) at :

(10) Y Inkl UN/i,1,3/(Ki)

(11) r;1(x) Inkl y

(12) SN(y) = Sn(r;1(x))ΩSN(r)= SN({μ;-1(z)}Ur)≠ø. I lys av Lemma 2.2.25 har man da:

SN(y) = c(0) v SN(y) = c(0) U Mg(<x,z>: zê[1/4,1>) v
SN(y) = Mg(<x,z>: zê[1/4,1>)

Videre har man fra den første konjunkten i (1) og Lemma 2.2.28 at: sêMg(μ(w): wêr;1(x)). På samme vis som under Tilfelle (A) innser man da at Max(q(w),SN({μ;-1(z)}Ur)) Inkl μ;-1(s).

Dermed har vi gitt et fullstendig bevis for satsen. **Q.E.D.**

Vi har nå gjennomført verifikasjonen av aksiomene i Rest(E;2,L;0) i modellen M. Dermed har vi gitt et bevis for vårt hovedteorem, Teorem 2.2.6. Fra denne satsen, samt Lemma 1.4 i §1, følger:

Korollar 2.2.30 Konsis(ZFC) –> Konsis(Rest(E;2,L;0)

Man ser med andre ord at Rest(E;2,L;0) er konsistent relativt til ZFC. Som vi tidligere har bemerket er beviset for Korollar 2.2.30, og forøvrig våre andre teoremer og hjelpesetninger, formaliserbare i ZFC og dermed også i E;2. De resultater som er fremlagt her kan derfor i prinsippet anses som eksempler på teoremer i E;2.

Siden M avbilder en rekke andre formler enn teoremene i Rest(E;2,L;0) på teoremer i ZFC, kan man utlede en lang rekke mer spesielle konsistens-resulateter fra de teoremene om M som vi har vist.

Korollar 2.2.30 er naturligvis et viktig resulatat siden det garanterer at det fragmentet av E;2 som vi har studert er fritt for motsigelser om ZFC er det. Modellen M ble hovedsakelig konstruert med det for øye å etablere dette resultat. Imidlertid har vi også utført konstruksjonen av M i detalj for å vise hvordan modeller for teorier av den typen vi arbeider med her kan konstrueres in concretio. Har leseren fordøyd konstruksjonen avM tror jeg vedkommende ikke vil finne det så vanskelig å konstruere andre Rest(E;2,L;0)-modeller på egenhånd.

La oss kort antyde en mulig modifikasjon av M som vi kan kalle M;∞. Den kan best beskrives ved henvisning til Figur 2.1.2 i §2.1. I stedet for å benytte intervallet [0,1] på X-aksen (noe som er helt vilkårlig) kunne vi i stedet f.eks. ha benyttet oss av intervallet [0,∞>, Vi kunne så ha forlenget linjestykkene c(i) (iêN) i det uendelige mot høyre. Man kunne så i det vesentlige ha definert alle komponentene i modellen som før, men erstattet [0,1] med [0,∞> i definisjonene der det trengs. Man kunne nå f.eks. anordne det slik at c(0)Uf(x) for alle x≥0 representerte utsagn som p0 ser er tilfelle ved tidspunktet <x,0> i a0. Videre kunne man gjort "p0's erindring" kumulativ ved f.eks. å kreve at UN/0≤y<x/{c(0)Uf(x), c(0)Ug(x)} er de utsagn som p0 erindrer ved tidspunktet <x,0> i verdenen a0 om x>0. En modifikasjon av M i denne retning er sikkert mulig, men det vil ta for meget plass å komme inn på dette i detalj her. I stedet vil vi nå rette oppmerksomheten mot et annet fragment av L;(E;2) og studere mengdeteoretiske intepretasjoner av dette som utgjør modeller for de aksiomene i L;(E;2) som har med lover å gjøre.

§3 Mengdeteoretiske intepretasjoner av aksiomene om lover i E:2.

I dette avsnittet ønsker vi å studere intepretasjoner av et litt annet fragment av L;(E;2) enn det vi har betraktet tidligere i dette kapitlet. I det nye fragmentet kan alle våre "lov-teoretiske" aksiomer, dvs. LA1 – LA16 formuleres. (Se Kapittel II, Avsnitt E, §1– §3)

Det første-ordens språket vi vil begrense oss til å betrakte, L;F,er definert som det første-ordens språket som foruten ê-predikatet inneholder nøyaktig de følgende predikater som primitive ikke-logiske predikater:

(0.1)	MV(x)	(1.29)	Kons(x,y)
(0.4)	MI(x)	(1.30)	Sann;l(x,w)
(1.27)	Lov(x)	(1.31)	R;c(w, y)
(1.28)	Ant(x,y)		

Her er predikatene (0.1) og (0.4) hentet fra listen i §2 i dette kapitlet. (1.27) – (1.31) er prdeikatene i den tilsvarende listen i Kapittel II, Avsnitt E, §2. Vi definerer teorien Rest(E;2,L;F) som teorien E;2 med språket begrenset til L;F. De ikke-logiske aksiomene i

Rest(E;2,L;F) vil være: (i) Alle ZFC-aksiomene i L;F. (ii) De omntologiske aksiomene i T;A som inneholder predikatene MI(x) og MV(x).
(iii) Aksiomene LA1 – LA16. Ingen andre av aksiomene i E;2 enn de som er nevnt kan formuleres i L;F.

Ved definisjonene av de intepretasjoner som vil bli betraktet vil vi benytte oss av de samme konvensjoner som vi gjorde i §1 og §2 i dette kapitlet.

Hovedinnholdet i denne paragrafen kan beskrives slik: Først gir vi en rekke temmelig enkle eksempler på intepretasjoner MêI(L;F,L;ê) der man har at Val;M(Rest(E;2,L;F)). Vi presenterer og beviser så et langt mer generelt intepretasjonsteorem fra hvilket man kan utlede de tidligere resulatene. Det kan også bemerkes at alle de satsene som vil bli formulert i resten av dette avsnittet kan formaliseres og bevises i ZFC.

§3.1 Modellen M:1

Vårt første eksempel på en mengdeteoretisk intepretasjon av L;F kalles her for M;1. Denne vil være fullstendig definert om man angir hva M;1(π) er for de predikatene π som ble listet opp i forrige paragraf.

Man setter:

(1) M;1(MI(x)) =: xê{.....,-2, -1, 0, +1, +2, +3, ...}

Som man ser er de mulige individene i modellen M;1 de hele tallene. Vi antar at disse er definert ved vanlige mengdeteoretiske definisjoner slik at høyreside i (1) forkorter en formel i L;ê.

Vi trenger følgende hjelpebegreper:

S= {0, 1, ...,10}
T= {.....,-2, -1, 0, +1, +2, +3, ...}

S er her definert helt vilkårlig. Man kunne ha brukt en hvilken som helst annen endelig, ikke-tom, mengde i stedet. Det er meningen at elementene i T, som bokstaven kanskje antyder, skal representere tidspunktene i modellen.

Vi setter så:

(2) M;1(MV(x)) =: xê(Pt(S)^T)

Som man ser er de mulige verdenene i modellen M;1 representert ved funksjoner i mengden (Pt(S)^T). Vi plukker ut to elementer a1= 0 og a2=1 i mengden S og setter per definisjon:

H = (Pt(S)^T)
E(a1) = ∂têT(c(Mg(h: hê(Pt(S)^T) & a1êh(t)),H))
E(a2) = ∂têT(c(Mg(h: hê(Pt(S)^T) & a2êh(t)),H))

Ser man nøyere på definisjonene av E(a1) og E(a2) ser man at E(a1),E(a2)ê((2^H)^T).
E(a1) og E(a2) representerer altså to spesielle unære attributter i modellen. Man kan nå fullføre konstruksjonen av modellen M;1 på den følgende måte:

(3) M;1(Lov(x)) =: xê{<E(a1), E(a2)>}
(4) M;1(Ant(y,z)) =: zê{<E(a1), E(a2)>} & y =(z);1
(5) M;1(Kons(y,z)) =: zê{<E(a1), E(a2)>} & y =(z);2
(6) M;1(Sann;l(x,w)) =: xê{<E(a1), E(a2)>} & wêH &
(At)(têT –>(a1êw(t) –> a2ê(w(t+1))))
(7) M;1(R;c(w,y)) =: <w,y>êH^2 (= HXH)

Som man nokså fort forstår er denne modellen temmelig spesiell. Lovene i M;1, det finnes bare en, er representert ved det ordnete paret <E(a1), E(a2)>. Antesedent og konsekventbetingelse i denne loven er henholdsvis den første og andre komponenten i paret.

Det er en nå en temmelig kjedelig øvelse å verifisere at aksiomene LA1–LA16 holder i M;1. At ZFC-aksiomene i L;F og de ontologiske aksiomene i L;F holder er også trivielt. Det er klart at vi f.eks. har (Ey)(Ax)(xêy <–> MV(x))) er gyldig i M;1 siden man har at (Ey)(y = Pt(S)^T) er et teorem i ZFC. Tilsvarende kan sies i forbindelse med predikatet "MI(x)".

Vi kan i lys av dette konkludere med:

Teorem 3.1.1 (i) Val;(M;1)(Rest(E;2,L;F))
(ii) Konsis(ZFC) –> Konsis(Rest(E;2,L;F))

La x være en vilkårlig mengde. La oss da kalle mengden av alle par <y,x–y> der y Inkl x for det abstrakte rommet av totaltilstander over x. La T være en eller annen mengde og la oss tenke oss at den representerer klassen med tidspunkter. Man ser at det abstrakte rommet av totaltilstander over x kan representeres ved Pt(x). Klassen av de diverse funksjonene i Pt(x)^T kalles for klassen av historier over <T,x>. Er hêPt(x)^T, mao. er h en historie over <T,x> representerer h(t) der têT den totaltilstanden om foreligger ved tidspunktet t i historien h. Det er karakteristisk for de modellene som vi vil presentere i det følgende at de mulige verdenene blir identifisert med visse historie klasser over bestemte strukturer <T,x>.

Modellen M;1 er ganske visst ikke den "normale" modellen for L;F. Vi har f,eks. at M;1 verifiserer en formel som (E!x)Lov(x), med andre ord at det finnes en og bare en lov. Dette er selvfølgelig ikke intuitivt rimelig. La oss nå konstruere en modell M;2, – av en litt mer innfløkt natur –, som falsifiserer en rekke av de formlene som verifiseres av M;1.

§3.2 Modellene M:2 og M:3

Vi definerer fremdeles T ved:

T= {.....,-2, -1, 0, +1, +2, +3, ...}

Men vi vil nå la S være en mengde med uendelig mange elementer. For å være helt spesifikke setter vi per definisjon S= Mg(<n,0>: nêN). Vi setter a(i) = <i,0> for alle iêN. Dette innebærer selvfølgelig at S = Mg(a(i): iêN). H defineres nå ved H= Pt(S)^T. H er altså klassen av historier over <T,S>. De to funksjonene p og q er definert slik:

p(a(i)) = ∂têT(c(Mg(w: wêH & a(i)êw(t)),H)) (iêN)
q(a(i)) = ∂têT(c(Mg(w: wêH & a(i)êw(t+1)),H)) (iêN)

Vi definerer så:

L;n = <p(a(2n),q(a(2n+1))> for nêN
L = Mg(L;n: nêN).

Videre setter vi:

Sn = Mg(<x,y>: (En)(nêN & x=L;n & yêH &
(At)(têT –> (a(2n)ê(y(t)) –> a(2n+1)êy(t+1)))))

Vi kan så definere selve modellen M;2 ê I(L;F,L;ê) ved:

(1) M;2(MV(x)) =: xêH
(2) M;2(MI(x)) =: xêT
(3) M;2(Lov(x)) =: xêL
(4) M;2(Ant(x,y)) =: (yêL & x= (y);1)
(5) M;2(Kons(x,y)) =: (yêL & x= (y);2)
(6) M;2(Sann;l(x,w)) =: <x.w>êSn
(7) M;2(R;c(w,y)) =: <w,y>ê ZXZ der Z= Mg(w: (Ey)(yêL & <y,w>êSn))

Dermed har vi gitt en fullstendig definisjon av M;2.

Det er også nå temmelig likefrem å verifisere den følgende sats:

Teorem 3.2.1 Val;(M;2)(Rest(E;2,L;F))

Siden beviset for dette er rutinemessig og langt utelater vi det. Studerer man imidlertid modellen litt nøyere ser man at alle lovene i den er kontingente. Dette innebærer at vi kan legge til (8) (Ax)(Lov(x) –> Lov;k(x)) til aksiomene i Rest(E;2,L;F) uten at noen motsigelser oppstår. Likeledes ser man lett at modellen verifiserer formelen (9) Cd(Mg(x: Lov(x)) ≥ Aleph;0. M;1 derimot verifiserer negasjonen av denne formelen. I lys av Lemma 1.8 i §1 kan man derfor konkludere med at (9) er uavhengig av aksiomene i Rest(E;2,L;F). Hlt formelt kan dette resultatet formuleres slik:

Teorem 3.2.2 Konsis(ZFC) –> Uav(Cd(Mg(x: Lov(x)) ≥ Aleph;0, Rest(E;2,L;F)

Dette teoremet er bare ment som et eksempel på en sats om uavhengighet til formler i L;F med hensyn på teorien Rest(E;2,L;F). Med utgangspunkt i de to modellene M;1 og M;2 kunne man også ha utledet en rekke andre uavhengig-hetsresultater.

Man ser nå at også de følgende formler er sanne i M;2:

(10) (Ax)(Lov(x) –> A;x ≈ K;x≈ 1)
(11) (Ax)(Lov(x) –> ¬CLov(x))
(12) (Ax)(Lov(x) –> ¬L-Lov(x))

Ønsker man en modell som verifiserer formelen (Ax)(Lov(x) –> CLov(x)) kan man modifisere M;2 til M;3 slik: M;3 er nøyaktig som M;2 bortsett fra ved predikatet R;c. I forbindelse med dette definerer man først W;n ved:

W;n = Mg(x: xêH & <L;n,x>êSn)

Gitt denne definisjonen kan klausulen for M;3(R;c(w,y)) formuleres slik:

M;3(R;c(w,y)) =: <w,y>êUN/nêN/(W;n X SN/nêN/(W;n))

Gitt at M;3 er definert på denne måten kan man bevise:

Teorem 3.2.3 (i) Val;(M;3)(Rest(E;2,L;F))
(ii) Val;(M;3)((Ax)(Lov(x) –> CLov(x)))
(iii) Val;(M;2)(¬(Ax)(Lov(x) –> CLov(x))

I lys av Teorem 3.2.1 og Lemma 1.8 i §1 kan man da konkludere med at:

Teorem 3.2.4 Konsis(ZFC) –> Uav((Ax)(Lov(x) –> CLov(x)),Rest(E;2,L;F))

Igjen vil vi understreke at denne satsen bare er ment som et enkeltstående eksempel på et uavhengighetsresultat som vi nå er i stand til å bevise.

§3.2 Modellen M:4.

Vi er nå interessert i å konstruere en modell M;4êI(L;F,L;ê) som verifiserer de følgende formler:

(+1) Cd(Mg(x: CLov(x)))≥ Aleph;0
(+2) Cd(Mg(x: L-Lov(x)))≥ Aleph;0
(+3) Cd(Mg(x: Lov;k(x) &¬CLov(x)))≥ Aleph;0

I denne modellen skal det altså finnes minst tellbart uendelige mange kausallover, minst tellbart uendelig mange rent "apriori" lover og minst tellbart uendelig mange kontingente lover som ikke er kausallover.

Først defineres:

T= {.....,-2, -1, 0, +1, +2, +3, ...}
S= Mg(<n,0>: nêN). Vi setter a(i) = <i,0> for alle iêN.
H= Pt(S)^T.
p(a(i)) = ∂têT(c(Mg(w: wêH & a(i)êw(t)),H)) (iêN)
q(a(i)) = ∂têT(c(Mg(w: wêH & a(i)êw(t+1)),H)) (iêN)
r(a(i)) = ∂têT(c(Mg(w: wêH & (a(i)êw(t) v a(i+1)êw(t))),H)) (iêN)

Videre defineres (nêN):

A(n) = <p(a(5n)), r(a(5n))>
B(n) = <p(a(5n+1)), q(a(5n+2))>
C(n) = <p(a(5n+3)), q(a(5n+4))>

La oss så sette:

L = Mg(A(n): nêN)U Mg(B(n): nêN) U Mg(C(n): nêN)
Sn = Mg(<x,y>: xêL & yêH &
(At)(têT –> (((x);1)(t)‘y =1 –> ((x);2)(t)‘y =1)))
W;n = Mg(h: hêH & <C(n),h>êSn

Den mengdeteoretiske intepretasjonen M;4 êI(L;F,L;ê) defineres så slik:

(1) M;4(MV(x)) =: xêH
(2) M;4(MI(x)) =: xêT
(3) M;4(Lov(x)) =: xêL
(4) M;4(Ant(x,y)) =: (yêL & x= (y);1)
(5) M;4(Kons(x,y)) =: (yêL & x= (y);2)
(6) M;4(Sann;l(x,w)) =: <x.w>êSn
(7) M;4(R;c(w,y)) =: <w,y>ê U/nêN/(W;nX(SN/jêN/(W;j)))

Man kan nå bevise den følgende sats:

Teorem 3.3.1 (i) Val;(M;4)(Rest(E;2,L;F))
(ii) Val;(M;4)((+1)) & Val;(M;4)((+2)) &Val;(M;4)((+3))

Vi vil ikke gi noe detaljert bevis for denne satsen her. Det er tilstrekkelig å bemerke at beviset er av en rent rutinemessig natur.

§4 Et generelt intepretasjonsteorem for teorien Rest(E:2,L:F).

De intepretasjonene av Rest(E;2,L;F) som vi har spesifisert ovenfor er eksempler på intepretasjoner fra en langt mer omfangsrik klasse som vi nå vil avgrense helt presist.

For å kunne definere denne klassen definerer vi først hva vi forstår med en tilstandsstruktur:

Definisjon 4.1 Vi sier at et 4-tuple <T,S,Pt(S)^T,f> er en tilstandstruktur hvis og bare hvis det oppfyller følgende krav:

(i) T≠ø & S≠ø
(ii) Func(f) & Dom(f) Inkl T
(iii) (At)(têT –> (Et')(t'êT & ¬(tê{t',f(t')}) & ¬(f(t)ê{t', f(t')}))

I denne paragrafen betegner vi klassen av alle tilstandsstrukturer med J*. J;1, J;2,... etc. betegner elementer i J*.

Definisjon 4.2 Er J = <T,S,Pt(S)^T,f> en tilstandsstruktur, H= Pt(S)^T og a,bêS setter vi:

(1) p;J(a) = ∂têT(c(Mg(h: hêH & aêh(t)) ,H))
(2) q;J(a,f) = ∂têT(c(Mg(h: hêH & aêh(f(t))) ,H))
(3) r;J(a,b) = ∂têT(c(Mg(h: hêH & (aêh(t) v bêh(t))) ,H))
(4) At1(J) = Mg(p;J(a): aêS)
(5) At2(J) = Mg(q;J(a,f): aêS)

(6) At3(J) = Mg(r;J(a,b): a,bêS)

La J være en vilkårlig tilstandsmodell. Vi ønsker å definere hva som skal forstås med at M er en lov-modell over J. Dette gjøres ved den følgende definisjon:

Definisjon 4.3 La M = <L,K,A,Sn,R,U,H> være et 7-tuple og J =<T,S,Pt(S)^T,f> en tilstandstruktur. Da har vi at M er en lov-modell over J hvis og bare hvis M og J oppfyller de følgende krav:

(i) U=T & L≠ø
(ii) H = Pt(S)^T
(iii) R Inkl HXH
(iv) K = Mg(<x,y>: yêL & x= (y);2)
(v) A = Mg(<x,y>: yêL & x= (y);1)
(vi) Sn = Mg(<x,y>: yêL & yêH &
(At)(têT –>. (Az)(zê(x);1 –> z(t)‘y=1).–> (x);2(t)‘y=1))
(vii) (Az)(zêL –> ¬((z);2ê(z);1))
(viii) (Az)(zêL –> (z);1≠ø)
(ix) (EX)(L = CL(X) & X Inkl Prod[Pt(At1(J)), At1(J)UAt2(J)UAt3(J)]
hvor CL(X) er definert som den minste mengden Y som er inkludert i Prod[Pt((2^H)^T),(2^H)^T] og som oppfyller de følgende to krav:
(a) (Az)(zêY –> <{SN(z);1}, (z);2>êY)
(b) (Az)(Aw)(z,wêY & (z);1 = (w);1 –> <(z);1, SN({(z);2, (w);2})> êY)

Vi vil nå bevise den følgende sats som vi formulerer helt detaljert for klarhetens og tydelighetens skyld:

Teorem 4.1 (Hovedteorem) Anta at J =<T,S,Pt(S)^T,f> er en tilstandstruktur og at M er en lov-modell over J der M = <L,K,A,Sn,R,U,H>. Da holder følgende:

(1) (Ey)(Ax)(xêy <–> xêL)
(2) (Ay)(yêL –>. (Ez)((Ax)(xêz <–> <x,y>êA) &
(Ez)((Ax)(xêz <–> <x,y>êK))
(3) (Aw)(wêH –> (Ez)(Ax)(xêz <–> (xêL & <x,w>êSn)))
(4) (Ax)(xêL –> (En)(nêN & n≥1 &
(Az)(<z,x>êA v <z.x>êK. –> zê(2^H)^(U^n)
(5) (Ay)(yêL & wêH –> (<y,w>êSn <–>
(Ar)(rêU &(Az)(zê(y);1 –> z(r)‘w=1). –> (y);2(r)‘w=1)))
(6) x,yêL –> (x=y <–> ((x);1 = (y);1 & (x);2 = (y);2))
(7) (Ax)(xêL –> (x);1≠ø)
(8) (Ax)(xêL –> ¬((x);2 ê (x);1)
(9) (Ax)(xêL –> (E!y)(<y,x>êK))
(10) (Ax)(Ay)(x,yêL & (x);1 = (y);1 –>
(Ez)(zêL & (x);1=(z);1 & (z);2 = (x);2Ω(y);2))
(11) (Ax)(xêL –> (Ey)(yêL & (y);1 = {SN((x);1)} & (x);2 = (y);2))
(12) (Ax)(xêL –>. (Ay)(Az)(yê(x);1 & zêRgn(y) –> (Ew)(wêH & z(w)=0)) &
(Az)(& zêRgn((x);2) –> (Ew)(wêH & z(w)=0)))
(13) (Ax)(xêL –> (Az)(zêRgn(SN((x);1)) –> (Ew)(wêH & z(w)=0)))
(14) (Ax)(xêL –> ¬(Ey)(yêL & c(Mg(z: <y,z>êS),H) êRgn((x);2)))

(15) (Ax)(xêL –>
¬(Ey)(yêL & (Ez)(zê(x);1 & c(Mg(r: <y,r>êSn),H) êRgn(z))))

Bevis: Det er temmelig enkelt å se at (1) – (3) holder. Dette kommer av at L Inkl Prod[Pt((2^H)^T),(2^H)^T] og siden det er lett å se at Prod[Pt((2^H)^T),(2^H)^T] må være en mengde følger eksistensen av L ved hjelp av utsondringsaksiomet. At (2) og (3) holder følger lett ved å benytte replacementaksiomet. (4) – (9) skulle være temmelig opplagte i lys av definisjonene 4.1 – 4.3. Det skulle derfor neppe være nødvendig å gi detaljerte bevis for dem. Også (10) og (11) følger lett i lys av Definisjon 4.3, klausul (ix), på grunn av den induktive måten L er definert. De eneste påstandene som derfor trenger mer utførlige bevis er (12) – (15).

Vi ser først på første halvdel av (12). For å bevise denne påstanden er følgende hjelpesetning nyttig:

Lemma 4.2 (i) (Ax)(xêL –> (Ey)(ø≠y Inkl At1(J) & ((x);1 =y v (x);1 ={SN(y)})))
(ii) (Ax)(xêL –> (En)(nêN & n≥1 & (Es)(Seq(s) &
lh(s)=n & Rgn(s) Inkl At1(j)UAt2(J)UAt3(J) &
(x);2 = SN(Rgn(s)))))

Denne påstanden bevises lett ved induksjon på L. Beviset overlates til leseren.

La oss nå ta for oss den første halvdelen av (12). Anta:
(1.1) xêL & yê(x);1 & zêRgn(y). Ved hjelp av Lemma 4.2 kan man da slutte at det finnes q≠ø der (1.2) q Inkl At1(J) & ((x);1 =q v (x);1 = {SN(q)}). Fra den første halvdelen her følger ved hjelp av definisjonen av At1 at det eksisterer q2 Inkl S slik at (1.3) q= p;J"q2. Merk at p;J, slik vi har definert denne funksjonen, er en-entydig. Vi skiller mellom to tilfelle:

Tilfelle (i): (x);1=q. Dette og (1.1) impliserer yêq, som sammen med (1.3) impliserer at y = p;J(n0) for noe n0êq2 Inkl S. Sett h0 = Mg(<ø,x>: xêT). Det er klart at h0ê(Pt(S)^T) =H. Siden y =p;J(n0) følger fra (1.1) at zêRgn(p;J(n0)). Herav kan man slutte at det finnes têT slik at z= c(Mg(h: hêPt(S)^T & n0êh(t)),H). Men nå har vi: (At)(têT –> ¬(n0êh0(t))). Det følger da at z(h0)=0. I dette tilfelle har man altså (Eh)(hêH & z(h)=0).

Tilfelle (ii): (x);1 = {SN(q)}. Da har man y = SN(q). Siden q≠ø følger eksistensen av noe r0êq. Det må da finnes n1êq2 slik r0 = p;J(n1). Videre må ma ha zêRgn(SN(q)). Det vil si at det finnes têT slik at:

c;-1(z,H)= Mg(h: hêPt(S)^T & (Aj)(jêq2 –> jêh(t))) Inkl
Mg(h: hêPt(S)^T & n1êh(t)).

Men (At)(teT –> ¬(n1êh0(t))) hvor h0 er definert som i forrige tilfelle. Det følger derfor at z(h0)=0. Men herav (Eh)(hêH & z(h)=0).

Dette avslutter beviset for at den første halvdelen av (12) holder.
Vi trenger nå det følgende lemma:

Lemma 4.3 xêL –> (Ea)(Eb)(Ec)(<a.b,c>ê Prod/i,1,3/(At;i(J))[17] &
(x);2 = SN(aUbUc) & aUbUc ≠ø)

Denne satsen bevises lett ved induksjon på L og vi overlater beviset til leseren.

17 <a,b,c>ê Prod/i,1,3/(At;i(J)) innebærer at <a,b,c>ê At1(J)X At2(J)XAt3(J).

I kraft av Lemma 4.2 og Lemma 4.3 velger vi nå ut to utvalgsfunksjoner v1 og v2 med de følgende egenkaper:

(i) Dom(v1) = Dom(v2) = L

Er x êL har man:

(ii) v1(x) Inkl At1(J) & v1(x)≠ø & ((x);1 = v1(x) v (x);1= {SN(v1(x))})

(iii) v2(x)êProd/i,1,3/(At;i(J)) &
(x);2 = SN((v2(x));1U (v2(x));2 U (v2(x));3) &
UN/i,1,3/((v2(x);i)≠ø

Setter man:

p;J = ∂aêS(p;J(a))
q;<J,f> = ∂aêS(q;J(a,f))
r;J = Mg<{a,b},r;J(a,b)>: a,bêS)

har man at disse funksjonene er en-entydige. Vi definerer:

T1(x) = (p;J);-1"v1(x)
T21(x) = (p;J);-1" (v2(x));1
T22(x) = (q;<J,f>);-1"(v2(x));2
T23(x) = (r;J);-1"(v2(x));3

Det er ikke spesielt vanskelig å bevise den følgende sats:

Lemma 4.4 (i) hêH & têT & xêAt;1(J) & x=p;J(a) & aêS. –>
x(t)‘h =1 <–> aêh(t)

(ii) hêH & têT & xêAt2(J) & x= q;J(a,f) & aêS –>.
x(t)‘h =1 <–> aêh(f(t))

(iii) hêH & têT & xêAt3(J) & x=r;J(a,b) & a,bêS –>.
x(t)‘h =1 <–> (aêh(t) v bêh(t))

Man ha så ved hjelp av denne hjelpesetningen og definisjonen av T1(x):

Lemma 4.5 hêH & têT & xêL. –>
((Ay)(yê(x);1 –> y(t)‘h=1) <–> T1(x) Inkl h(t))

Man har videre:

Lemma 4.6 hêH & têT & xêL –>.
((x);2(t))‘h = 1 <–> ((Ar)(rêT21(x) –> rêh(t)) &
(Aq)(qêT23(x) –> qΩh(t)≠ø) &
(Ar)(rêT22(x) –> rêh(f(t))))

Denne satsen bevises igjen ved hjelp av Lemma 4.4 og definisjonene av T11(x), T22(x) og T23(x).

Det er nå forholdsvis enkelt å bevise den andre halvdelen av punkt (12) i Teorem 4.1:

Anta xêL & zêRgn((x);2). Man må ha at (x);2ê((2^H)^T) og derfor at det finnes t0êT slik at z=(x);2(t0). Definer h0 ved h0 = Mg(<ø,t>: têT). Da har man at h0êH = (Pt(S)^T). Anta nå for reduktio ad absurdum at :

(1.1) z(h0) = (x);2(t0)‘h0=1.

Ifølge Lemma 4.3 har man at UN/i,1,3/(v2(x);i)≠ø. I lys av definisjonene av T21(x), T22(x) og T23(x) følger derfor at UN/i,1,3/(T2i(x))≠ø. Men fra dette, (1.1) og Lemma 4.6 følger h0(t0)≠ø som er umulig i lys av definisjonen av h0. Man må følgelig ha (Eh)(hêH & z(h)=0).

La oss nå gi et bevis for punkt (13) i Teorem 4.1. Anta xêL & zêRgn(SN((x);1)). Det må da finnes noe t0êT slik at z= SN((x);1)‘(t0). Definer ighen h0 ved h0 = Mg(<ø,t>: têT) og anta for reduktio ad absurdum at

z(h0) = (SN((x);1)‘(t0))‘h0 =1. Det følger da ved hjelp av definisjonen av snittoperasjonen SN at (Ay)(yê(x);1 –> y(t0)‘h0=1). Ved hjelp av Lemma 4.5 innebærer dette T1(x) Inkl h0(t0). Men ved hjelp av Lemma 4.2 og valget av v1 har man at v1(x)≠ø. Det følger at T1(x)≠ø. Men da h0(t0)≠ø som er umulig i lys av definisjonen av h0. Dette viser at punkt (13) holder.

Det gjenstår nå bare å vise riktigheten av punktene (14) og (15) i Teorem 4.1. Vi tar først for oss (14). For å vise denne påstanden er det tilstrekkelig å bevise:

(+) (i) xêL & yêL & zêRgn((x);2) & (Ah)(hêH –> <y,h>êSn). –> (Eh)(hêH & z(h)=0)

(ii) xêL & yêL & zêRgn((x);2) & (Eh)(hêH & ¬<y,h>êSn). –> (Eh)(hêH & z(h)=1 &¬(<y,h>êSn))

Vi bemerker at (i) umiddelbart følger fra (12). Det er derfor tilstrekkelig å bevise (ii). Anta (1.1) xêL & yêL & zêRgn((x);2) & (Eh)(hêH & ¬<y,h>êSn). Fra den siste konjunkten følger ved hjelp av definisjonen av Sn at det finnes h1 og t1 slik at (1.2) (Az)(zê(y);1 –> z(t1)(h1)=1) og (1.3) (y);2(t1)‘h1 =0. Fra zêRgn((x);2) følger eksistensen av t0 slik at (1.4) z= ((x);2(t0)). Vi konstruerer nå en hê(Pt(S)^T) med de egenskaper som trengs. Siden J er en tilstandsstruktur finnes t2 slik at ¬(t0ê{t2,f(t2)}) & ¬f(t0)ê{t2,f(t2)}). h kan defineres på følgende måte:

(a) h(t0) = T21(x)UT23(x)

(b) h(f(t0)) = T22(x)

(c) h(t2) = h1(t1)

(d) h(f(t2)) = h1(f(t2))

(c) Er têt & ¬(tê {t0,f(t0), t2,f(t2)}) så settes h(t)= ø

Definert på denne måten er det lett å se at h har de følgende egenskaper:

(1.5) (Az)(zê(y);1 –> z(t2)‘h =1)

(1.6) (y);2(t2)‘h = 0

(1.7) (x);2(t0)‘h =1

Dette følger i kraft av definisjonen av h og Lemma 4.4 – 4.6. Men da må man ha: (eh)(hêH & z(h)=1 & ¬(<y,h>êSn)). Dette er hva vi ønsker. Dermed har det blitt vist at (14) i Teorem 4.1 holder.

Det gjenstår å vise at punkt (15) i Teorem 4.1 er korrekt. Det vil være tilstrekkelig å bevise:

(++) (i) xêL & yêL & zêRgn(w) &wê(x);1 & (Ah)(hêH –> <y,h>êSn). –>

(Eh)(hêH & z(h)=0)

(ii) xêL & yêL & zêRgn(w) & wê(x);1 & (Eh)(hêH & ¬<y,h>êSn). –>
(Eh)(hêH & z(h)=1 &¬(<y,h>êSn))

(i) er en konsekvens av (12) i Teorem 4.1, Det er derfor tilstrekkelig å bevise (ii). Fra forutsetningene i (ii) følger at det finnes h1 og t1 der:

(1.1) (Az)(zê(y);1 –> z(t1)(h1) =1)

(1.2) (y);2(t1)‘h1 =0.

Videre følger det fra den tredje forutsetningen i (ii) at det finnes t0 slik at:

(1.3) z=w(t0). Siden J er en tilstandstruktur finnes t2êT slik at ¬(t0ê{t2,f(t2)}) & ¬(f(t0) ê{t2,f(t2)}). Vi definerer nå hê(Pt(S)^T på følgende måte: Siden wê(x);1 har man at wêAt1(J). Det følger at det finnes aêS slik at w= p;J(a). I alle tilfelle er det klart at vi ved hjelp av Lemma 4.5 har at z(h)=w(t0)‘h =1 om T1(x) Inkl h(t0). Vi definerer så h slik:

(a) h(t0) = T1(x)

(b) h(t2) =h1(t1)

(c) h(f(t2)) = h1(f(t1))

(d) Er ¬(tê{t0, f(t2), t2}) setter vi h(t)=ø.

Man har da hê(pt(S)^T). Videre har vi ved hjelp av Lemma 4.4, (1.1), (1.2) samt definisjonen av h at:

(Ar)(rê(y);1 –> r(t2)‘h=1) & ((y);2(t2))‘h =0

Tilslutt har man fra (1.3), definisjonen av h og Lemma 4.5 at z(h)=1. Det følger altså at (Eh)(hêH & z(h)=1 & ¬(<y,h>êSn)). Dermed har vi gitt bevis for (++) og følgelig (15).

Det gjenstår nå bare å bemerke at vi har gitt et fullstendig bevis for vårt hovedteorem, Teorem 4.1. **Q.E.D.**

Vi definerte tidligere uttrykket "x er en tilstandsstruktur". Vi forkorter nå dette med "TS(x)".

Fra hovedteoremet kan man utlede et mer generelt intepretasjonsteorem som vi nå ønsker å spesifisere.

La oss kalle en sekvens F;1, F;2, F;3, F;4 av formler i L;ê for *L;F-plausibel* hvis og bare hvis den oppfyller d følgende krav:

(a) F;1 – F;3 har bare x;1 som fri variabel. F;4 har to distinkte fri variabler x;1,x;2.

(b) Setter vi T =Mg(x: F;1(x), S= Mg(x: F;2(x)) og L= Mg(x: F;3(x)) og f= <x,y>: F;4(x,y)> så gjelder det at hver og en av de følgende formler er et teorem i ZFC:

(i) M(S) & M(T)

(ii) TS(<T,S,Pt(S)^T,f>)

(iii) (Az)(zêL –> ¬((z);2ê(z);1))

(iv) (Az)(zêL –> (z);1≠ø)

(v) (EX)(EJ(J = <T,S,Pt(S)^T,f> & L = CL(X) &
X Inkl Pt(At1(J))X UN/i,1,3/(Ati(J)))

La oss så definere hva vi forstår med en plausibel L;F-intepretasjon:

Definisjon 4.4 Anta MêI(L;F,L;ê). Da er M en plausibel L;F-intepretasjon hvis og bare hvis den oppfyller de følgende krav:

(1) Det finnes en L;F-plausibel sekvens F;1, F;2, F;3 og F;4 i L;ê der man har:

(i) M(MV(x)) =: xêPt(S)^T)
(ii) M(MI(x)) =: xêT
(iii) M(Lov(x)) =: xêL
(iv) M(Ant(x,y)) =: (yêL & xê(y);1)
(v) M(Kons(x,y))=: (yêL & x = (y);2)
(vi) M(Sann;l(x,y) = [xêL & yêPt(S)^T & (At)(têT –> ((Az)(zê(x);1 –> z(t)‘y=1) –> ((x);2(t)‘y)=1))

der L = Mg(x: F;3(x)) , S = Mg(x: F;2(x)), T = Mg(x: F;1(x)) og f= Mg(<x,y>: F;4(x,y)).

Fra disse definisjonene og hovedteoremet følger umiddelbart det følgende teorem:

Teorem 4.7 Er M en plausibel L;F-intepretasjon der MêI(L;F,L;ê) har man at Val;M(Rest(E;2,L;F)

Teorem 4.7 er vårt andre viktige resultat i dette avsnittet. Selvom denne satsen er forholdsvis generell er det likevel trolig at det er mulig å formulere langt mer generelle teoremer. Det bør også bemerkes at de L;F-plausible intepretasjonene i betydningen ovenfor fremdeles er av en temmelig spesiell karakter og at de ikke nødvendigvis behøver å ha noen likhet med "intuitivt sett naturlige intepretasjoner". Imidlertid virker den måten vi har konstruert modeller på temmelig fleksibel. Det virker derfor ikke urimelig å tenke seg at kontruksjonen kunne generaliseres mer. For eksempel er vår begrensning til unære attributter over J en helt kunstig begrensning som utelukkende er motivert av enkelhetsgrunner.

Det bør nevnes at ideen bak begrepet tilstandstruktur slik det er innført her er hentet fra von Wright. Den har blitt anvendt av ham i forbindelse med kausalanalyse, kausalforklaring og tidslogikk. I denne sammenheng kan man konsultere von Wright [1], [2] og [3]. Det bør også understrekes at lignende ideer blir benyttet i Chellas [1] og da i tilknytning til et forsøk på å analysere historisk nødvendighet.

La oss helt tilslutt bemerke at vi her har studert temmelig begrensede fragmenter av E;2 og at det ikke uten videre er klart at de uavhengighets- og konsistensresultatene man kan bevise på grunnlag av de satser som er fremlagt her kan utvides til hele E;2. Det kan likevel være grunn til å nevne at det ikke virker helt urimelig å tro at dersom MêI(L;F,L;ê) er en L;F-plausibel intepretasjon som oppfyller visse krav så kan det finnes en M'êI(L;(E;2),L;ê) slik at restriksjonen av M' til L;F er identisk med M. Et bevis for et slikt teorem, om det er mulig, vil naturligvis bli komplisert og det vil ikke bli gjort noe forsøk på dette her. Men et resultat av denne art ville være interessant siden det da ville være tilstrekkelig for å bevise at en formel F i L;F er uavhengig av E;2 bare å bevise at det finnes M1,M2êI(L;F,L;ê) som er L;F-plausible derman har Val;M1(F) og Val;M2(¬F). Det er åpenbart at modeller for L;F er langt lettere å arbeide med en modeller for hele L;(E;2) som er et meget komplisert språk.

La meg som avslutning si at et meget mer omfattende arbeid enn det vi utført i dette kapitlet er nødvendig før man kan konkludere med at E;2 har blitt grundig gjennomanalysert.

Kapittel IV

Kapittel IV

§1 Om muligheten av å begrunne E:2. Begrunnelsesbegreper.

En rekke forhold ved E;2 og de beslektede teoriene vi har formulert trenger kommentarer. I dette avsnittet skal vi spesielt se på spørsmål som har med begrunnelse å gjøre.

Er det mulig å begrunne en slik teori som E;2? Finnes det mer dyptgående begrunnelser for teorien? Uttrykket "begrunnelse" synes ikke å være spesielt klart og kan sikkert tolkes på flere forskjellige måter. I visse betydninger av ordet kan det da kanskje være trivielt at det finnes begrunnelser for E;2, i andre betydninger av ordet kan det kanskje være langt mer tvilsomt om dette er tilfelle. I dette avsnittet vil vi introdusere en rekke begrunnelsesbegreper som jeg tror kan betraktes som forholdsvis rimelige og interessante presiseringer av det vage uttrykket "begrunnelse". Med utgangspunkt i disse presiseringene vil vi så forsøke å gjøre rede for hva det er i dette arbeidet som vi kan sies å gitt en begrunnelse for og hvilke ting det er som ikke er begrunnet tilstrekkelig.

Vi i denne forbindelse drøfte definisjoner av de følgende konstruksjoner:

(1)	"x representerer en begrunnelse i svak betydning for setningen F i språket L"	"Be;o(x,F,L)"
(2)	"x representerer en begrunnelse i streng betydning for setningen F i språket L"	"Be;s(x,F,L)"
(3)	"x representerer en begrunnelse i svak betydning for setningen F i språket L relativt til setningsmengden Δ"	"Be;o(x,F,L,Δ)"
(4)	"x er en reduktiv begrunnelse i svak betydning av det teoretiske systemet T i språket L"	"ReBe;o(x,T,L)"
(5)	"x er en reduktiv begrunnelse i streng betydning av det teoretiske systemet T i språket L"	"ReBe;s(x,T,L)"

Vi har tidligere definert predikatet "S er et formalt system over L". Vi trenger nå begrepet om et gyldig formalt system:

Definisjon 1.1 S er et gyldig formalt system over L, i symboler "ValF(S,L)" hvis og bare hvis SEMI;u(L) & FS(S,(L);1) &

Th(S)Ω Mg(F: FêCFm((L);1) Inkl Log(L)

Et gyldig formalt system over L er med andre ord et formalt system over L der alle teoremene i systemet, Th(S), er logiske sannheter i L, ie. er med i Log(L).

Vi har tidligere, i Kapittel II, Avsnitt E, §3 definert "QLan(L)" og "NQ(s,L)". Videre har vi Del I definert predikatet "x er et bevis i det formale systemet S over den intensjonale språkstrukturen L", i symboler "Pf(x,S,L)".[18] Et bevis i et formalt system S over L er en sekvens av formler i L. Er x en sekvens av formler er x(lh(x)), der lh(x) er lengden til sekvensen x, den siste formelen i sekvensen. Vi kan derfor definere "b er et bevis i det

18 Se Del I, Kapittel III, §3.

formale systemet S i L for formelen F", "Bev(b,S,L,F)" ved å sette at Bev(b,S,L,F) <–> (Pf(b,S,L) & F = b(lh(b))).

Det er nå på sin plass å forklare hva som det siktes til med et teoretisk system i språket L:

Definisjon 1.2T er et teoretisk system over L, i symboler "TSy(T,L)" hvis og bare hvis SEMI;u(L) & QLan(L) og det finnes Δ,S,∏ som oppfyller de følgende krav:

(i) ValF(S, L) & T =<S,Δ,∏>
(ii) Δ Inkl CFm((L);1) & ∏ Inkl CFm((L);1)
(iii) (AF)(Fê∏ –> (EG;1)...(EG;n)(G;1,...,G;nêΔ &
(Eb)(Bev(b,S,L, G;1&....&G;n –> F)))

Vi er nå i stand til å formulere eksplikasjonsforslaget av predikatet (3) ovenfor:

Definisjon 1.3 Vi sier at x representerer en begrunnelse i svak betydning for setningen F i språket L relativt til setningsmengden Δ, Be;o(x,F,L,Δ), hvis og bare hvis det finnes T;1, L;1, b og Δ som oppfyller de følgende krav:

(i) x = <T;1,L;1,b, Δ> & ValF(T;1,L;1)
(ii) SEMI;u(L) & SEMI;u(L;1) & QLan(L;1) & QLan(L)
(iii) (As)(NQ(s,L;1) <–> NQ(s,L))
(iv) (AF)(FêCFm(L) & FêCFm(L;1) –> Me(F,L;1) = Me(F,L;2))
(v) Δ Inkl CFm(L;1) & FêCFm(L;1)
(vi) (EG;1)....(EG;n)(G;1,...,G;nêΔ & Bev(b,T;1,L, G;1&....&G;n –> F))

Som man ser er x en begrunnelse for setningen F i L relativt til setningsmengden Δ dersom x er et 4-tuple <T;1,L;1,b,Δ> der T;1 er et gyldig formalt system over L;1 og b et bevis i T;1 over L;1 for formelen G;1&....&G;n –> F der G;1,...,G;n er formler i Δ. Språkene L;1 og L skal være utvetydige semiformale språk, videre skal de være språk med normal kvantifikasjonsteori og normalt konnektivsystem for kvantifikasjonsteori. Dessuten skal enhver setning som er felles for de to språkene ha samme betydning i begge språk. Som man ser er dette begrunnelsesbegrep temmelig omfattende.

Vi definerer så predikatet (1) slik:

Definisjon 1.4 Be;o(x,F,L) <–> (EΔ)(Be;o(x,F,L,Δ))

Definiens i definisjonene 1.3 og 1.4 er formler i L;A* og derfor i L;(E;2).

For å kunne gi en rimelig eksplikasjon av (2) innfører vi det følgende predikat som ikke uten videre synes å kunne defineres på grunnlag av predikatene i vokabularet til L;(E;2):

(6) "Aksiomene og slutningsreglene i systemet T over L er intuitivt mer evidente enn F" "ME;1(T,L,F)"

Vi foreslår så den følgende definisjon av predikatet (2) på listen ovenfor:

Definisjon 1.5 Be;s(x,F,L) <–>. Be;o(x,F,L) & ME;1((x);1,(x);2,F) &
(AG)(Gê(x);4 –> Sann(G,L))

Skal x med andre ord være en begrunnelse i streng forstand for setningen F i L må x være en begrunnelse i svak forstand for F i L, men i tillegg må se setningene som F bevises ut fra i begrunnelsen være sanne og det må også være slik at aksiomene og slutningsreglene i det systemet som benyttes må være intuitivt mer evidente enn F. Begge disse to tilleggskravene virker rimelige.

Med "X er en intepretasjon av det semiformale språket L;1 inn i det semiformale språket L;2", i symboler "I(X,L;1,L;2)" forstår vi en rekursiv funksjon X som avbilder Fm((L;1);1) inn i Fm((L;2);1). Med andre ord avbilder X formlene i den intensjonale språkstrukturen (L;1);1, som er den første komponenten i det semiformale språket L;1 inn i klassen av formler i (L;2);2, den intensjonale språkstrukturen som utgjør den andre komponenten i L;2.

Man kunne nå foreslå den følgende definisjon av predikatet (4):

Definisjon 1.6x er en reduktiv begrunnelse i svak betydning av det teoretiske systemet T i språket L, ReBe;o(x,T,L), hvis og bare hvis det finnes X, T;1 og L;1 som oppfyller de følgende krav:

(i) x = <X,T;1,L;1>
(ii) SEMI;u(L) & SEMI;u(L;1) & QLan(L) & QLan(L;1)
(iii) I(X,L,L;1)
(iv) TSy(T,L) & TSy(T;1,L;1)
(v) ValF((T;1);1,L;1) & X"((T);3) Inkl (T;1);3
(vi) ¬(X"((T);2) Inkl (T;1);2U Ax((T;1);1))

Merk at hvis x er et eller annet n-tuple, dvs. x= <y;1,...,y;n> så betegner "(x);i" for $1 \leq i \leq n$ den i'te komponenten i tuplet x. Siden T;1 er et triple om T;1 er et teoretisk system over L;1 har man at (T;1);1, (T;1);2 og (T;1);3 er henholdsvis den første, andre og tredje komponenten i T;1. Er T;1 et teoretisk system i den betydningen som er fastlagt ved Definisjon 1.2 kan man kalle (T;1):2 for basis i T;1, (T;1);3 for teoremene i T;1 og (T;1);1 for det formale systemet i T;1.

Som det skulle være mulig å se av Definisjon 1.6 har man altså at x representerer en reduktiv begrunnelse i svak betydning av det teoretiske systemet T over L x er en struktur <X,T;1,L;1> som oppfyller de følgende krav:
(i) X er en meningstro intepretasjon av L inn i L;1. Dette innebærer at X avbilder de lukkede formlene i L på lukkede formler i L;1 med samme betydning. (ii) X avbilder teoremene i T på teoremer i T;1. (iii) Det finnes formler i basis i T som ikke X avbilder på aksiomer i det formale systemet i T;1 eller på formler i basis i T;1. I tillegg skal L;1 og L være utvetydige semiformale språk og (T;1);1 et gyldig formalt system.

Også dette reduktive begrunnelsesbegrepet synes å være temmelig generelt.

For å definere predikatet (5) på listen som ble gitt innledningsvis innfører vi et nytt primitivt begrep. Det dreier seg om den følgende relasjon som vi ikke vil forsøke å analysere nærmere her:

(7) "Aksiomene og slutningsreglene i systemet T;1 over L;1 er intuitivt mer evidente enn aksiomene og slutningsreglene i systemet T;2 over L;2" "ME;2(T;1,L;1,T;2,L;2)"

Denne konstruksjonen er naturligvis temmelig vag og uklar og det er muligens umulig å gi noen rigorøs definisjon av den. Det virker likevel ikke som om det skulle være umulig å kunne oppnå allmenn enighet om at relasjonen holder for en lang rekke konkrete eksempler <T;1,L;1,T;2,L;2>. Det virker derfor ekstremt om man skulle avvise dette predikatet som meningsløst. Er T et teoretisk system bemerker vi at Ax((T);1)U(T);2 er det som forstås ved aksiomene i T. Det bør også nevnes at vi i tilknytning til predikatet ME;2 ønsker å begrense oss til teoretiske systemer.

Den definisjonen vi kan tenke oss å betrakte i forbindelse med predikatet (5) ovenfor er da denne:

Definisjon 1.7 ReBe;s(x,T,L) <–>. ReBe;o(x,T,L) & ME;2((x);2,(x);3,T,L) &
(AF)(Fê(((x);2);3) –> Sann(F,(x);3))

For at x skal representere en streng reduktiv begrunnelse av det teoretiske systemet T i språket L må altså aksiomene og slutningsreglene i den teorien T intepreteres inn i, la oss kalle den T', være mer evidente enn dem i T. Dessuten må alle teoremene i denne teorien T' være sanne.

Dermed har vi presentert de begrunnelsesbegrepene vi vil ta i betraktning i det følgende. Det skulle være klart at disse definisjonene kan varieres på forskjellig vis slik at man kan ta i betraktning en hel familie av forskjellige begrunnelsesbegreper som avviker mer eller mindre radikalt fra dem som er innført her.

Vi innfører nå predikatet:

(8) " x er en setning i L som er direkte evident" "De(x,L)"

Språket L;(E;2) utvidet med predikatene (6) – (8) betegnes nå med L;(E;2)+. Den følgende formulering i L;(E;2)+ synes å være til en viss grad plausibel:

J1 De(x,L) –> ¬(ET)(ME;1(T,L,x))

Formuleringen uttrykker at om x er en setning i L som er direkte evident så finnes det ikke noe teoretisk system over L der slutningsreglene og aksiomene er intuitivt mer evidente enn x.

Også det følgende prinsipp i L;(E;2) kan virke rimelig:

J2 De(F,L;1) & SEMI;u(L;1) & EMI;u(L;2) & Me(F,L;1) = Me(F,L;2). –>De(F,L;2)

Formelen uttrykker at dersom en setning F i har den samme betydning i L;1 og L;2 så er den direkte evident i L;1 bare dersom den er direkte evident i L;2 gitt at L;1 og L;2 er utvetydige semniformale språk.

Vi begrenser relasjonen De til lukkede formler og utvetydige semiformale språk:

J3 De(F,L) –> (SEMI;u(L) & FêCFm(L))

Teorien E;2 med språket utvidet til L;(E;2)+ kaller vi akkurat her for "E;2+". Er X en eller annen mengde med formler i L;(E;2)+, ie. X Inkl Fm(L;(E;2)+) betegner uttrykket "E;2+ [X]" teorien E;2 utvidet med formlene i X som nye ikke-logiske aksiomer.

Vi har:

Teorem 1.8 (E;2+[J1,J2,J3]) (AF)(AL)(De(F,L) –> ¬(Ex)(Be;s(x,F,L)))

Er setningen F direkte evident finnes det ingen begrunnelse i streng forstand for F i L. Dette er hva Teorem 1.8 uttrykker.

Denne satsen synes å stemme godt med den følelsen noen har av at det er meningsløst å søke etter en rettferdiggjørelse i form av et bevis for påstander som er direkte innlysende.

Man kan bevise en litt sterkere setning enn Teorem 1.8:

Teorem 1.9 (E;2+[J1,J2,J3]) De(F,L;1) & SEMI;u(L;1) & EMI;u(L;2) & Me(F,L;1) = Me(F,L;2). –> ¬(Ex)(Be;s(x,F,L;2))

Bevis: Anta for reduktio ad absurdum at det finnes x der man har:
(1) Be;s(x,F,L;2). Fra dette og definisjonen av Be;s følger at det finnes L;3 og T;3 slik at:

(2) ME;1(T;3,L;3,F)
(3) (AG)(GêCFm(L;2)ΩCFm(L;3) –> Me(G,L;2) = Me(F,L;3))
(4) SEMI;u(L;2) & SEMI;u(L;3).

Fra forutsetningene i satsen og J2 følger De(F,L;2). Dette, (3), (4), samt J2, impliserer De(F,L;3). Herav kan man så ved hjelp av J1 slutte
¬(ET)(ME;1(T,L;3,F), noe som åpenbart strider mot (2). **Q.E.D.**

Med definisjonene av predikatene (1) – (5), samt formlene J1 – J3 har vi her spesifisert en teori om begrunnelser som det nå er fullt mulig å undersøke og utvikle mer utførlig. Som det fremgår av det som har blitt fremlagt er teorien helt generell og gjelder derfor for alle teoretiske systemer over utvetydige semiformale språk og for påstander som kan uttrykkes i slike språk. Teorien har derfor i en viss forstand et anvendelsesområde som potensielt er meget stort. Den kan f.eks. anvendes på alle de teoretiske systemene vi hittil har spesifisert og kommentert i denne avhandlingen. Eksempelvis gjelder dette f.eks. de semantiske teoriene T;A – T;D* i Del I, men også slike teorier som E,E;1 og E;2.

På den annen side må det medgis at teorien i visse henseende er meget svak slik at man neppe kan utlede interessante påstander om man ikke supplerer den med en rekke tilleggspremisser.

§2 Om muligheten av å gi en begrunnelse for E:2

Det skulle være ganske klart at det er mulig å gi rigorøse mengdeteoretiske definisjoner av språket L;(E;2) og teorien E;2. Det samme gjelder for alle de andre teoriene som har blitt eksplisitt definert i denne delen av denne avhandlingen og i Del I av den. Vi begrenser oss nå til å betrakte L;(E;2), L;(E;2)+, samt teoriene E;2 og E;2+. Ønsker man å gi en definisjon av L;(E;2) er det hensiktsmessig å gjøre dette på en slik måte at man kan vise IntS(L;(E;2)), med andre ord at L;(E;2) er en intensjonal språkstruktur. Videre er det fornuftig å anordne det slik at Exp(L;(E;2)) = E;1 der E;1 er den uttrykksmengden som ble definert i Kapittel I i Del I. Jeg tror det skulle være temmelig klart for leseren hvordan en helt eksplisitt definisjon av L;(E;2) som oppfyller disse kravene kan formuleres. Man går frem på samme måte som ved definisjonen av L;e i Kapittel II. Tenker man seg nå at man har definert L;(E;2) er det

naturligvis lett å definere et konnektivsystem for kvantifikasjonsteori og setningslogikk, s0, over L;(E;2). Siden L(E;2) er en intensjonal språkstruktur er den ikke noe utvetydig semiformalt språk. Man kan definere L;(E;2)* ved å sette:

L;(E;2)* = <L;(E;2), n0>

der n0 er den konstanten i L;A* som betegner språket norsk. Har man konstruert disse definisjonene er det klart at uttrykket "SEMI;u(L;(E;2)*)" forkorter en formel i E;2. Men det er ikke opplagt at denne formlen lar seg bevise i E;2. Snarere er det motsatt. Intuitivt er det temmlig opplagt at den ikke lar seg utlede. man kan derfor om man er interessert i påstanden betrakte det følgende som et mulig tilleggsaksiom til E;2:

J4 SEMI;u(L;(E;2)*)

Konnektivsystemet s0 inneholder naturligvis de vanlige kvantorene og utsagnslogiske konnektivene i L;(E;2). Man kan heller ikke i E;2 bevise at dette er faktisk er et normalt konnektivsystem eller at det er entydig bestemt. Med andre ord kan man ikke i denne teorien bevise NQ(s0, L;(E;2)*) eller at (E!x)(NQ(x,L;(E;2)*). Man må derfor eventuet legge til dette som et nytt ikke-logisk aksiom:

J5 NQ(s0,L;(E;2)*) & (E!x)(NQ(x, L;(E;2)*)

Det skulle nå være klart at vi på grunnlag av aksiomene i E;2, samt J4 og J5, kan bevise QLan(L;(E;2)*).

Man kan naturligvis også definere L;(E;2)+ på en måte som er helt analog med definisjonen av L;(E;2). Det skulle også være klart at s0 da vil være et konnektivsystem over L;(E;2)+. Vi setter L;(E;2)+* = <L;(E;2),n0> og formulerer de følgende to postulater:

J6 SEMI;u(L;(E;2)+*)
J7 NQ(s0,L;(E;2)+*) & (E!x)(NQ(x, L;(E;2)+*)

Intuitivt kan man tenke seg E;2 oppfattet som et formalt system over L;(E;2). Det er imidlertid i denne sammenheng mer hensiktsmessig å tenke seg E;2 definert slik at systemet blir et trippel <X1,X2,X3> der X1 er et formalt system over L;(E;2). Aksiomene i dette systemet er da de vanlige utsagnslogiske, kvantifikasjons-teoretiske og identitetsteoretiske aksiomene. Slutningsreglene er modus ponens og universell generalisering. X2 vil så være de universelle lukningene av alle de ikke-logiske aksiomene som vi tenker oss at inngår i E;2. X3 må definere på en slik måte at den oppfyller kravene satt til ∏ i Definisjon 1.2 I §1. Det skulle være temmelig innlysende at det er mulig å gi en definisjon av E;2 om oppfyller disse kravene. En helt tilsvarende definisjon kan gis av E;2+.

Defineres E;2 og E;2+ på denne måten kan man i teorien E;2 utvidet med J4 – J7 bevise de følgende formler:

(i) ValF((E;2);1, L;(E;2)*)
(ii) ValF(E;2+);1, L;(E;2)+*)
(iii) TSy(E;2, L;(E;2)*)
(iii) TSy(E;2+, L;(E;2)+*)

For å unngå misforståelser vil vi gjerne understreke at vi ovenfor strengt tatt ikke har gitt definisjoner om oppfyller de kravene vi har nevnt. Vi har bare påstått at det er mulig å gi slike definisjoner. Men dette skulle tross alt være temmelig klart ved litt ettertanke. Når det ikke gis detaljerte definisjoner skyldes det at de ville bli svært lange om de skrives ut fullstendig.

La oss betrakte den følgende formel:

J8 (AF)(Fê(E;2);2 –> Sann(F, L;(E;2)*))

Det er klart at vi ikke kan bevise denne setningen i E;2. For kunne man det ville vi også kunne bevise at E2 er konsistent i selve teorien E;2. Men i lys av Gødels konsistensresultater er dette umulig. Man kan i denne forbindelse konsultere Gødel [1]. La nå t;1,....,t;q være de formlene i E;2 som vi tidligere har oppført som teoremer og la b;1,...,b;q være de korresponderende bevis i E;2. t;1,...,t;q kan gis rigorøse definisjoner i L;(E;2) og det samme er tilfelle med b;1,...,b;q. la oss så definere:

Definisjon 2.1 Bg;j = < (E;2);1, L;(E;2)*, b;j, (E;2);2>

Gitt denne definisjonen kan man ikke ubetinget bevise:

Be;o(Bg;j,t;j, L;(E;2)*,(E;2);2)

Men man kan vise:

Teorem 2.2 (E;2) $1 \leq i \leq q$ & J4 & J5 –> Be;o(Bg;j,t;j, L;(E;2)*,(E;2);2)

Dette innebærer at alle de teoremene som har blitt oppført i Del I og Del II kan begrunnes relativt til (E;2);2 i svak forstand og i E;2 utvidet med J4 og J5 kan vi gi et strengt bevis for dette. Hvis man nå i tillegg postulerer:

J9 $(Aj)1 \leq j \leq q$ –> ME;1(E;2,L;(E;2), t;j))

så kan man i teorien E;2+ utvidet med J4, J5, J8 og J9 bevise:

Teorem 2.3 (E;2+[J4,J5,J8,J9]) $(Ai)(1 \leq i \leq q$ –> (Ex)(Be;s(x,t;i,L;(E2)*))

Naturlig kan man også, noe som er helt ekvivalent i lys av deduksjonsteoremet, bevise:

Teorem 2.4 (E;2+) J4& J5 &J8 &J9 –> $(Ai)(1 \leq i \leq q$ –> (Ex)(Be;s(x,t;i,L;(E2)*))

Som man altså ser har man at dersom man aksepterer aksiomene J4, J5, J8 og J9 så finnes det en begrunnelse i streng forstand for alle de teoremene vi har oppført i forbindelse med E;2. Er nå E;2+ utvidet med de nevnte formler som ikke-logiske aksiomer en akseptabel teori? Det er klart dette kan diskuteres. Av de nevnte aksiomer virker kanskje J8 og J9 minst plausible. Dette forhindrer likevel ikke at man ved nærmere ettertanke og analyse kan komme til den konklusjon at man likevel bør akseptere dem. Dette virker imidlertid mindre sannsynlig. Trolig er det helt fornuftig å betvile J9 selvom enkelte av konjunktene i dette aksiomet kan være korrekte. Endel av de teoremene vi har oppført kan man kanskje argumentere for at er av en mer evidet natur enn aksiomene og slutningsreglene i E;2.

Selvom E;2+ utvidet med J1 – J5, J8 og J9 mildt sagt kan ha et litt tvilsomt preg virker det likevel rimelig å tro at teorien er konsistent. Man kan derfor ikke på et mer snevert, rent logisk, grunnlag rive den overende.

La oss nå betakte det følgede aksiom i L;(E;2)+:

J10 (Ay)(yê((E;2)+);2 –> De(y, L;(E;2)+*))

Dette prinsipp er temmelig dristig og uttrykker at alle de ikke-logiske aksiomene i (E;2+) er setninger som er direkte evidente i L;(E;2)+*. Hvis man med en direkte evident påstand mener en påstand som ikke lar seg utlede fra et system av påstander der påstandene i systemet er mer evidente er det ikke helt opplagt at J10 er uholdbar. Man kunne snarere fristes til å argumentere for at den er holdbar. I forbindelse med J10 nevner vi også:

J11 (Ay)(yê((E;2+);1) –> De(y, L;(E;2)+*))

Denne setningen sier at alle de logiske aksiomene i E;2+ er direkte evidente setninger i L;(E;2)+*.

Vi skal ikke ta noen stilling til J10 eller J11, men er kun interessert i å se på visse konsekvenser av dem. La oss kalle teorien E;2+ utvidet med J1 – J11 for T;1. Vi setter med andre ord:

T;1 = E;2+[Mg(T;i: iê{1,...,11}].

I T;1 er den følgende setning et teorem. Dette er en umiddelbar konsekvens av Teorem 1.8 i §1:

Teorem 2.5 (T;1) (Ay)(yê(E;2+);2U((E;2);1);1 –> ¬(Ex)Be;s(x,y,L;(E;2)+*.)

Dette teoremet innebærer at det er meningsløst å søke etter en begrunnelse i streng forstand for de logiske og ikke-logiske aksiomene i E;2+ om man aksepterer J10 og J11. Siden man kan fremsette visse argumenter til fordel for J10 og J11 følger det at man kan argumentere for meningsløsheten av en strengere begrunnelse av E;2+-aksiomene. Dette forhindrer ikke at teorien kan utledes fra andre teorier der aksiomene er like evidente og også kanskje kan virke mer evidente på noen.

Siden vi i prinsippet kan gi en fullstendig formell og rigorøs definisjon av E;2+ i L;(E;2) følger det også at vi kan gi en slik definisjon av T;1. La oss nå tenke oss at vi utvider T;1 med:

q(1) (Ay)(yê(T;1);2 –> De(F, L;(E;2)+*))

som nytt ikke-logisk aksiom. Vi setter T;2 = T;1[q(1)]. Man kan da videre betrakte:

q(2) (Ay)(yê(T;2);2 –> De(F, L;(E;2)+*))

Man kan nå definere T;3 = T;2[q(2)] og fortsette på denne måten slik at man får en sekvens av teorier T;1, T;2, T;3,.....,T;n, T;(n+1),..... ad inf. I denne sekvensen vi da T;(n+1) = T;n[q(n)] der q(n) er:

q(n) (Ay)(yê(T;n);2 –> De(F, L;(E;2)+*))

Et spørsmål som umiddelbart reiser seg er om man kan gi noen streng definisjon av sekvensen <T;n>/nêN/ innenfor rammen av L;(E;2). Vi skal straks komme tilbake til dette spørsmålet. I alle tilfelle er det klart at de følgende to teoremer holder om vi kan gi en slik definisjon forutsatt at vi setter T;Ô = UN/nêN/(T;n):

Teorem 2.6 (T;Ô) (Ay)(yê(T;Ô);2 –> ¬(Ex)Be;s(x,y,L;(E;2)+*))

Videre har man:

Teorem 2.7 (T;(n+1)) (Ay)(yê(T;n);2 –> ¬(Ex)Be;s(x,y,L;(E;2)+*))

La oss nå se litt mer detaljert på problemet som ble nevnt ovenfor. Det er lett å se at at vi kan definere T; for hvert n=1,2,3,.... osv. Problemet er å definere T;n der n er en variabel. Det skulle være klart at dersom "(Ay)(yêx –> De(y,L;(E;2)+*)" skrives ut i primitiv notasjon så får man et uttrykk som er identisk med en sekvens s1êE;1. Det er også nokså klart at variabeltegnet "x" vil være et ledd i denne sekvensen, la oss si ledd nummer n. Er t en annen sekvens i E;1 så er s;1;(n)[t] sekvensen som oppstår når t skytes inn for leddet n i s1. Tilsvarende har man at "xU{y}" forkorter e sekvens s2êE;1. I s2 vil variabeltegnene "x" og "y" forekomme. La oss si som ledd nummer k og l. Er t1,t2 êE;1 er s2;(k,l)[t1,t2] den sekvensen som fremkommer som resultat når t1 og t2 settes inn simultant for henholdsvis ledd nummer k og ledd nummer l i sekvensen s2. Det skulle være klart at man kan definere s1 og s2 i L;A og at vi i L;A også kan spesifisere og definere tallene l,k,n. Videre kan vi også definere funksjonene f(x)= s1;(n)(x) og g(x,y) = s2;(k,l)[x,y] i L;A. Det bør bemerkes at uttrykket "((E;2)+);2U ((E;2);1);1" også forkorter en svært lang sekvens s3êE;1 som man kan spesifisere helt rigorøst om man gidder. Vi har følgelig at s;1(n)(s3) er den setningen i L;(E;2)+* som forkortes av "(Ay)(yê((E;2)+);2U ((E;2);1);1 –> De(y,L;(E;2)+*))".

Vi trenger nå en siteringsfunksjon, N. Først bemerker vi at uttrykket "x_y" som vi definerte i Kapittel I i Del I, forkorter, når det skrives ut i primitiv notasjon, en sekvens s4êE;1. I denne sekvensen vil variabeltegnene "x" og "y" forkomme på, la oss si, plass nummer j og r. Sekvensen s4 kan defineres rigorøst og eksplisitt i L;A. Det samme kan tallene j og r. Er t1,t2êE;1 så er s4;(j,r)[t1,t2] den sekvensen i E;1 som er resulatet av å sette inn t1 og t2 for leddene j og r i s4. Funksjonen h(x,y) = s4;(j,r)[x,y] kan naturligvis bli rigorøst definert i L;A. Nå vet vi at konstantene a,...,å, A,....,Å forkorter visse eksplisitt definerbare tegnsekvenser s(a),...,s(å), s(A),...,s(Å)êE;1. Man kan nå definere induktivt siteringsfunksjonen N ved:

(i) N(x) = s(x) om xêE;1 & lh(x)=1
(ii) Er [x1,...,x,n]êE;1 og x;(n+1)êE;1 & lh(x;(n+1))=1 setter man:
N([x,1,...,x;(n+1)]) = s4;(j,r)[N[x;1,...,x;n],N(x;(n+1))]

Denne induktive definisjonen skulle det så være klart at man kan omforme til en eksplisitt definisjon.

La oss så se på hvordan man rent formelt kan definere T;n. Først defineres funskjonene a og b simultant ved induksjon på n:

(i) a(0) = s1;n[s3] & b(0)=s3

(ii) a(m+1) = s1;n[s2;(k,l)[b(m),N(a(m))]]
b(m+1) = s2;(k,l)[b(m), N(a(m))]

Denne definisjonen kan så omformes til en eksplisitt definisjon. Etter disse forberedelsene kan så T;n defineres på en slik måte at T;n er et teoretisk system over L;(E;2)+* der (T;n);2 = {J1,...,J11}U(E;2+);2 U {a(m): m<(n-1)} om n≥1. T;(Ô) kan så defineres på en slik måte at (T;(Ô));2 = U/n,1,∞/((T;n);2)

Skrives alle de definisjonene vi her har antydet ut i detalj er det mulig å gi et helt stringent bevis for Teorem 2.6 og Teorem 2.7.

La oss nå foreta en kort oppsummering av det vi har gjort så langt. I §1 spesifiserte vi en teori om begrunnelse og ga eksplisitte definisjoner av en lang rekke begrunnelsesbegreper. I denne paragrafen har vi anvendt teorien på E;2 og sett nøyere på de betingelser som er tilstrekkelige for at denne teorien skal kunne la seg begrunne i svak eller streng forstand. En av konklusjonene var at dersom aksiomene i E;2 er direkte evidente finnes det ikke noen begrunnelse i streng forstand for disse asiomene.

La oss nå forsøke å si noe mer om det evidensbegrep som her er involvert, dvs. la oss fremsette enkelte bemerkninger om den mulige betydning til predikatet "De(x,L)". La (2^W) være klassen av ultrautsagn. Intuitivt sett virker det ikke urimelig å si at et slikt utsagn er direkte evident dersom og bare dersom utsagnet er evident og det ikke i tillegg lar seg utlede fra noe system av utsagn og slutningsregler der utsagnene og reglene i systemet som helhet er mer evidente enn utsagnet. For å gjøre denne tilsynelatende rimelige ideen mer presis må det først klargjøres hva som menes med et system i denne forbindelse. La oss først definere noen hjelpebegreper. L er definert ved:

L = Mg(x: xê(2^W) & (Aw)(wêI –> x(w)=1))

L er klassen av alle logisk sanne ultrautsagn (finstrukturerte utsagn). Man har at et utsagn xêL hvis og bare hvis x er sant i enhver logisk mulig verden.

Dernest definerer vi GR;n, klassen av gyldige n-ære slutningsregler (n≥1) ved:

GR;n = Mg(x: x Inkl (2^W)^(n+1) & (Ay;1)...(Ay;(n+1))(<y;1,....y;(n+1)>êX &
<y;1,..,y;n>êL^n. –> y;(n+1)êL))

Med andre ord er x en n-ær gyldig slutningsregel hvis og bare hvsi x er en n-ær relasjon over mengden av ultrautsagn og klassen av logiske sannheter er lukket under denne relasjon. Mengden av slutningsregler kan så defineres ved
R = Mg(x: (En)(nêN & n>1 & xêGR;n)). Vi sier at x er et system, i symboler "ST(x)" hvis og bare hvis x er et ordnet par <z,w> der z er en ikke-tom klasse med utsagn og w er en ikke-tom klasse med slutningsregler. Er x et system så er Thm(x) klassen av teoremer i x og dette er per definisjon den minste mengden Y Inkl (2^W) som inneholder (x);1 og som er lukket under slutningsreglene i (x);2.

Vi skal tillate oss å innføre det følgende predikat:

"x er et utsagn eller en slutningsregel som det er lettere
å innse riktigheten til enn utsagnet y" "Le(x,y)"

Man kan så betrakte det følgende forslag til en definisjon av predikatet "x er et utsagn som er direkte evident i verdenen w", "DEvid(x,w)":

DEvid(x,w) <–> . Evid(x,w) & xê(2^W) & wêI &
¬(Ey)(ST(y) & xêThm(y) & (Ax)(xê(y);1 –> Evid(x)) &
(Az)(zê(y);1U(y);2) –> Le(z,x)))

Med andre ord er et utsagn direkte evident i verdenen w hvis og bare hvis det er evident og det ikke finnes noe system y der alle aksiomene, ie elementene i (y);1 er evidente og hvor alle slutningsreglene og aksiomene i systemet er lettere å innse riktigheten av enn x.

Den følgende formel fikserer så betydningen til "De(F,L)":

J12 SEMI;u(L) & FêCFm(L) –>. De(F,L) <–> DEvid(Me(F,L),a0)

Det er naturligvis nærliggende å tenke se Le som en transitiv og irrefleksiv relasjon:

J13 (i) x,y,zê(2^w) –>. Le(x,y) & Le(y,z)–> Le(x,z)
(ii) xê(2^W) –> ¬Le(x,x)
(iii) Le(x,y) –>. zêRU(2^W) & yê(2^W)

Vi bemerker de følgende meget enkle korollarer til disse definisjonene og prinsippene:

Teorem 2.8 (i) Evid(x,w) <–> ¬(Ey)(yê(2^W) & Le(x,y) –> DEvid(x,w))
(ii) Evid(x,w) &¬DEvid(x,w). –>. (Ey)(ST(y) & xêThm(y) &
(Az)(zê(y);1 –> Evid(z,w)))

Det vi har gjort ovenfor er naturligvis bare å antyde en fullstendig tentativ teori om direkte evidente utsagn. Det er klart at denne teorien må utarbeides og gjennomanalyseres mer før man tydelig kan se om den er fruktbar og interessant. Videre er det naturlig å knytte de begrepene vi her har innført til de begrepene vi tidligere har nevnt: predikatene ME;1 og ME;2. Muligens ved at ma formulerer flere prinsipper. Det som så langt er nevnt får imidlertid være tilstrekkelig som en antydning av en mulig oppfatning av direkte evidens.

§3 Om muligheten av reduktive begrunnelser av E:2

La oss nå se på et litt annet spørsmål, nemlig spørsmålet om i hvilken grad det er mulig å gi en reduktiv begrunnelse av E;2 og nær beslektede teorier.

Først kan det imidlertid være hensiktsmessig å fremsette ekelte preliminære bemerkninger.

I det følgende oppfatter vi L;ê som en intenjonal språkstruktur. De eneste predikatkonstruksjonene som inngår i denne strukturen er "x er medlem av y" og "x er identisk med y". Vi tenker oss nå at L;ê er definert i L;(E;2) på en slik måte at Exp(L;ê)= E;1. Videre vil det bli forutsatt at konnektivsystemet s0 som ble omtalt i forbindelse med L;(E;2) i §2 også er et konnektivsystem for L;ê. Vi tenker oss gitt en standarddefinisjon av dette. Vi setter L;ê* = <L;ê,n0> og teker oss at det følgende er et aksiom i vår teori:

J14 SEMI;u(L;ê*)

Denne formelen uttrykker at <L;e,n0> er et semiformalt utvetydig språk over norsk. Videre betrakter vi det følgende postulat som innebærer at s0 er et normalt konnektivsystem for kvantifikasjonsteori over L;ê*:

J15 NQ(s0,L;ê*) & (E!x)(NQ(x,L;ê*)

Man kan sammenligne formlene J14 og J15 med formlene J4 og J5 i §2.

Vår neste forutsetning er at ZFC er definert som et triple <X1,X2,X3> der X1 er et formalt system over L;e, mer nøyaktig er X;1 et standard aksiomsystem for kvantifikasjonteori med modus ponens og universell generalisering som eneste slutningsregler. X;2 er klassen av av de universelle lukningene av de ikke-logiske aksiomene i ZFC og X3 er definert slik at den oppfyller kravet til ∏ i Definisjon 1.2 i §1. Definisjonen av ZFC er altså i lys av disse bemerkningene helt analog med den definisjonen av E;2 som vi har gitt tidligere i dette kapitlet. Hvis vi nå forutsetter at vi har gitt passende definisjoner av E;2, ZFC,L;(E;2) og L;ê, kan man bevise i teorien E;2 utvidet med formlene J4, J5, J14 og J15 som nye ikke-logiske aksiomer:

Teorem 3.1 (i) TSy(ZFC, L;ê*) & TSy(E;2, L;(E;2)*)
(ii) QLan(L;ê*) & QLan(L;(E;2)*)
(iii) ValF((ZFC);1, L;ê*) & ValF((E;2);1, L;(E;2)*)

Vi bemerker at alle de begrepene som ble innført i §1 i Kapittel III kan gis rigorøse mengdeteoretiske definisjoner. Videre bemerker vi at predikatet "I(X,L;1,L;2)" ble definert ovenfor og innebærer at X er en rekursiv avbildning av formlene i språket L;1 inn i formlene i språket L;2. Det er nå mulig å bevise:

Teorem 3.2 XêI(L;(E;2), L;ê) –> I(X,L;(E;2), L;ê)

Dette teoremet uttrukker at dersom X er en mengdeteoretisk intepretasjon av L;(E;2) inn i L;ê så er X også en rekursiv avbildning av de formlene i L;(E;2) inn
i formlene i L;ê.

I lys av Teorem 3.1, Teorem 3.2 og Definisjon 1.6 er det nå temmelig opplagt at vi må ha:

Teoerem 3.3 XêI(L;(E;2),L;ê) & Val;X((E;2);3) &
¬(X"(E;2);2 Inkl (ZFC);2U((ZFC);1);1). –>
ReBe;o(<X,ZFC,L;ê*>,E;2, L;(E;2)*)

Siden det er lett å sjekke at XêI(L;(E;2),L;ê) impliserer at:
¬(X"(E;2);2 Inkl (ZFC);2U((ZFC);1);1)
er Teorem 3.3 ekvivalent med:

Teorem 3.4 XêI(L;(E;2),L;ê) & Val;X((E;2);3) . –>
ReBe;o(<X,ZFC,L;ê*>,E;2, L;(E;2)*)

Det skulle være klart at vi ikke kan bevise Teorem 3.3 – 3.4 i E;2 siden aksiomene J4, J5, J14 og J15 ikke kan bevises i E;2. I E;2 har vi derfor bare:

Teorem 3.5 (E;2) XêI(L;(E;2),L;ê) & Val;X((E;2);3) & J4 & J5 & J14 & J15 . –>
ReBe;o(<X,ZFC,L;ê*>,E;2, L;(E;2)*)

Som man ser sier disse satsene i det vesentlige at dersom det finnes en mengdeteoretisk intepretasjon X av L;(E;2) inn i L;ê som modellerer E;2, dvs. er slik at Val;X((E;2);3) så finnes det en reduktiv begrunnelse i svak forstand av teorien E;2 over L;(E;2)*. Det ble fremsatt tidligere en gjetning om at
(EX)(XêI(L;(E;2),L;ê) & Val;X((E;2);3)) lar seg bevise i E;2. I lys av teoremene ovenfor er det da et korollar at det eksisterer en reduktiv begrunnelse i svak forstand av E;2 i L;(E;2)* og at dette lar seg bevise i E;2 om denne teorien utvides med aksiomene som er nevnt i Teorem 3.5.

Fra Teorem 3.5 samt Definisjon 1.7 i §1 har man:

Teorem 3.6 (E;2) Anta at følgende holder:
(i) XêI(L;(E;2),L;ê) & Val;X((E;2);3) & J4 & J5 & J14 & J15
(ii) ME;2(ZFC, L;ê*, E;2, L;(E;2)*)
(iii) (AF)(Fê(ZFC);3 –> Sann(F,L;ê*))
Da gjelder:
ReBe;s(<X,ZFC,L;ê*>,E;2, L;(E;2)*)

To av forutsetningene i dette teoremet:
(ii) ME;2(ZFC, L;ê*, E;2, L;(E;2)*) og
(iii) AF)(Fê(ZFC);3 –> Sann(F,L;ê*))
kan synes heller tvilsomme. Muligens er den første av disse forutsetningen mer tvilsom enn den andre. Den andre kan man muligens argumentere til fordel for at er rimelig selv om den selvfølgelig ikke kan bevises i ZFC ellerfor den saks skyld E;2. I lys av Definisjon 1.7 kan Teorem 3.6 skjerpes til:

Teorem 3.7 (E;2) Anta at følgende holder:
(i) XêI(L;(E;2),L;ê) & Val;X((E;2);3) & J4 & J5 & J14 & J15
Da gjelder at følgende betingelser holder
(ii) ME;2(ZFC, L;ê*, E;2, L;(E;2)*)
(iii) (AF)(Fê(ZFC);3 –> Sann(F,L;ê*))
hvis og bare hvis man har at:
ReBe;s(<X,ZFC,L;ê*>,E;2, L;(E;2)*)

I forrige kapittel fremviste vi en mengdeteoretisk intepretasjon av M av språket L;0. Tenker man seg gitt en rent mengdeteoretisk intepretasjon av L;0 på samme måte som av L;(E;2) og setter man L;0* = <L;0,n0> så kan man bevise den følgende sats. Den kan også oppfattes som et korollar til Teorem 2.26 i §2 i Kapittel III:

Teorem 3.8 (E;2) SEMI;u(L;0*) & NQ(s0,L;0*) & J14 &J15. –>
ReBe;o(<M,ZFC,L;ê*>, Rest(E;2,L;0), L;0*)

Spørsmålet om det er mulig å gi reduktive begrunnelser av E;2 som ikke er av den mengdeteoretiske typen vi har betraktet her er naturligvis interessant. Det er også et vanskelig problem. Det mest interessante ville trolig ha vært om man kunne ha spesifisert et semiformalt utvetydig språk L;X og et teoretisk system T;X over L;X der f.eks. L;X ville bli ansett for fullstendig meningsfullt av de aller fleste kompetente logikere og filosofer, og T;X som en svært klar, overbevisende og fruktbar teori over L;X. Hvis man så hadde kunnet vise at det fantes en meningstroverdig intepretasjon av L;(E;2)* inn i L;X, eller i det minste en intepretasjon, som de fleste kompetente ville se på som meget interssant, la oss kalle den H, slik at <H, T;X,L;X> representerte en reduktiv begrunnelse i svak forstand av E;2 i L;(E;2)* ville meget ha vært oppnådd.

Man kan imidlertid ikke se bort fra at muligheten av dette er å regne som en vakker drøm. Det ville være fåfengt å lete etter en slik begrunnelse om man kan vise at det er mulig å utlede uplausible setninger fra E;2. Problemstillingen er heller ikke spesielt klar og den bør kanskje presiseres noe før man kan se tydeligere hva som vil kvalifisere som en positiv eller negativ løsning. Imidlertid virker det ikke som noen overdrivelse å si at problemstillingen kan oppfattes som viktig, og den bør tas alvorlig.

§4 Karakteriseringsproblemer.

Vi vil i denne paragrafen omtale en del problemer som nokså umiddelbart dukker opp i forbindelse med E;2 og teorier som er beslektet med denne.

La oss, for å kunne formulere problemene så klart som mulig, tenke oss L;(E;2) utvidet med predikatet:

(1) "T er en teori i det semiformalt utvetydige språket
L som gir en temmelig mange interessante opplysninger
om hvilke objekter som hører med til klassen y og hvilke
som ikke gjør det. "INF(T,L,y)"

Dette predikatet er naturligvis temmelig vagt. Likevel skal vi i det følgende behandle det som om det hadde en forholdsvis velavgrenset betydning siden det er tilstrekkelig presist for våre formål her. Språket L;(E2) utvidet med INF vil vi i akkurat denne paragrafen betegne med L;(E;2i).

Man kan nå introdusere predikatet "x representerer en tilfredstillende karakteristikk av klassen y", i symboler "Kt(x,y)" ved den følgende definisjon:

Definisjon 4.1 Kt(x,y) <–> (Ez)(Ew)(x= <z,w> & SEMI;u(w) & TSy(z,w) & (AF)(Fê(x);2 –> Sann(F,x)) & INF(z,w,y))

Vi skal i det følgende si at man løser karakteriseringsproblemet for en mengde a hvis og bare hvis man konkret angir eller konstruerer en teori x slik at Kt(x,a). Videre vil vi si at elementene i Mg(x: Kt(x,a)) representerer løsninger på karakteriseringsproblemet for a. Endelig kan man si at det finnes en positiv løsning på karakteriseringsproblemet for a hvis og bare hvis Mg(x: Kt(x,a))≠ø.

La oss forsøke å si noe om disse begrepsdannelsene som kan kaste noe lys over dem. Det synes som om

(4.2) INF(E;2, L;(E;2), N)

kan passere som et eksempel på en forholdsvis rimelig påstand i L;(E;2i). Her er N klassen av de naturlige tallene definert på von Neumanns måte. Indirekte må man kunne si at E;2 gir en stor mengde opplysninger om denne mengden og dens elementer siden en lang rekke satser om den kan utledes i E;2. Videre er det mulig å utlede en rekke setninger i E;2 som angir nødvendige og tilstrekkelige betingelse for medlemskap i denne mengden. Også de følgende setninger i L;(E;2i) virker forholdsvis rimelige av samme grunner:

(4.3) (Aa)(aêOn –> INF(E;2, L;(E;2)*,a))
(4.4) (Aa)(aêOn –> INF(E;2, L;(E;2)*, V:a))

Definerer man INF* = Mg(<T,L,y>: INF(T,L,y)) høres det rimelig ut å si at E;2 ikke gir en særlig mange opplysninger om hvilke tripler som hører med til denne mengden og hvilke som ikke gjør det. Den følgende setning synes derfor plausibel:

(4.5) ¬ INF(E;2,L;(E;2)*, INF*)

La oss i forbifarten bemerke at det er lite trolig at (4.1) – (4.5) lar seg uttrykke i L;(E;2). Grunnen er at det virker tvilsomt om predikatet INF lar seg definere ved hjelp av de termene som inngår i det ikke-logiske vokabularet til L;(E;2).

Selvom <E;2, L;(E;2>) ikke gir noen tilfredstillende løsning av karakteriseringsproblemet for mengden INF* synes det ikke å være noe logisk sett til hinder for at problemet kunne ha en positiv løsning. Man kunne naturligvis postulere:

(4.6) (Ex)(Kt(x,INF*)

Men det ville naturligvis ha vært mer interessant om man hadde kunnet utlede dette fra noe mer opplagt, eller bevist påstanden ved å konkret spesifisere en x0 hvor man hadde Kt(x0,INF*).

Jeg tror man må medgi at langt de fleste relasjonene og mengdene som omtales i L;(E;2) ikke blir gitt noen tilfredstillende karakteristikk av E;2 i den betydning vi her har i tankene. Dette gjelder selvom man antar at E;2 er en helt korrekt teori. E;2 gir en f.eks. bare temmelig abtrakte og "blodløse" opplysninger om enkelhetsrelasjonene <R;w>/wêI/ og det samme synes å være tilfelle med de viktigste relasjonene som omtales i den evidensteoretiske og kunnskaps-teoretiske delen av teorien. Vi kan derfor ikke på noen måte si at vi i denne avhandlingen har gitt noen tilfredstillende løsning på karakteriseringsproblemet for disse relasjonene. Merk at dette ikke viser at teorien E;2 er usann eller uinteressant. Det kan i høyden vise at den er en ufullstendig og i deduktiv henseende svak teori. Heller ikke kan man slutte at problemene er uløselige. Umiddelbart virker det svært vanskelig å se hva det er som eventuelt skulle kunne vise dette.

Symptomatisk for de forholdene vi her har nevnt er det at om man betrakter f.eks. den akseptanseteoretiske delen eller kunnskapsteoretiske delen av E;2 så sier denne svært lite konkret om hvilke utsagn det er man faktisk vet at er tilfelle, eller hvilke teorier man bør akseptere relativt til forskjellige spesifiserte evidensmengder. Liknende bemerkninger kan

gjøres i forbindelse med den prøvbarhetsteoretiske delen av teorien, og den delen som har med lover og forklaringer å gjøre.

La oss avslutte med noen, muligens spekulative, bemerkninger i tilknytning til dette. La oss betrakte L;(E;2)*. Sett:

$$\Delta = Mg(F: F \hat{e} CFm(L;(E;2)^* \ \& \ Sann(F,a0))$$

Δ er med andre ord klassen av alle de setninger i L;(E;2)* som er sanne i den aktuelle verden. La oss så betrakte det teoretiske systemet over L;(E;2)* som har alle formlene i Δ som ikke logiske aksiomer. Dette kan vi kalle C;a0. Siden Δ er en ufattelig rik aksiommengde, er naturligvis C;a0 en meget rik teori. Den vil faktisk være komplett. La nå π være et vilkårlig n-ært predikat i L;(E;2) ($n \geq 1$) og sett per definisjon:

$$j;a0(\pi) = Mg(<x;1,...,x;n>: Me(\pi,L;(E;2)^*)(<x;1,...,;n>)`a0 = 1)$$

Det er klart at enhver påstand som kan uttrykkes i L;(E;2)* om hva som hører med til mengden $j;a0(\pi)$ og hva som ikke gjør det avgjøres av C;a0. Det er også naturlig å tro at det her dreier seg om temmelig mange påstander. For ethvert π som er et n-ært predikat i L;(E;2) er det derfor naturlig å konkludere med at C;a0 er en teori i L;(E;2)* som gir en temmelig mange interessante opplysninger om hvilke objekter som hører med i $j;a0(\pi)$ og hvilke som ikke gjør det. Med andre ord virker det som om følgende påstand er korrekt:

$$(4.6) \quad (A\pi)(\pi \hat{e} Pred;n(L;(E;2)) \rightarrow INF(C;a0, L;(E;2)^*, j;a0(\pi)))$$

I lys av Definisjon 4.1 impliserer dette:

$$(4.7) \quad (A\pi)(\pi \hat{e} Pred;n(L;(E;2)) \rightarrow Kt(<C;a0, L;(E;2)^*>, j;a0(\pi)))$$

Herav følger naturligvis at karakteriseringsproblemet for $j;a0(\pi)$ har en i prinsippet positiv løsning for alle $\pi \hat{e} Pred;n(L;(E;2))$ ($n \geq 1$).

Disse overveielsene er naturligvis av meget begrenset verdi fordi det selvfølgelig ikke er mulig å spesifisere C;a0. Men de har en viss interesse, om enn beskjeden, fordi de kan gjøre en litt mer optimistisk stemt angående mulighetene for å utvide E;2 slik at man får en enda mer informativ teori.

§5 Noen uformelle bemerkninger om uttrykksrikdommen til L:(E:2).

Hvor stor interesse teorien E;2 har avhenger delvis av hvor meget av interesse som kan uttrykkes i språket L;(E;2) og delvis i hvilken grad E;2 er i stand til å avgjøre de virkelig interessante påstandene som lar seg uttrykke i dette språket. Selvfølgelig vil også interessen til E;2 avhenge av i hvilken grad den kan anses som en korrekt eller sann teori.

Et spørsmål som oppstår i denne forbindelse er hvorvidt en rekke faktisk eksisterende vitenskapelige teorier kan omtales i L;(E;2) og om interessante påstander om slike teorier, f.eks. av metodologisk, logisk og erkjennelsesteoretisk natur, kan uttrykkes i L;(E;2). Merk her at det er et spørsmål om hvorvidt utsagn av interesse *om* visse teorier kan uttrykkes i L;(E;2). Det er ikke et spørsmål om utsagnene i disse teoriene kan uttrykkes i L;(E;2). Det er høyest tvilsomt om f.eks. Einsteins relativitetsteori lar seg uttrykke eller formulere ved hjelp av predikatene i vokabularet til L;(E;2). En slik påstand virker ved første blikk temmelig absurd.

Betrakter man nå klassen av abstrakte intensjonale språkstrukturer over E;1 så ser man raskt at denne er svært rik. Betrakter man videre klassen av alle formale systemer over

de abstrakte språkstrukturene i den nevnte klassen overbeviser man seg også lett om at denne er nærmest ufattelig rikholdig. Dette innebærer at man in concretio kan spesifisere et ubegrenset antall formale systemer som kan inneholde tusenvis av ikke-logiske predikater. I lys av disse overveielsene virker det ikke helt uberettiget å tro at det skulle la seg gjøre å spesifisere en temmelig detaljert versjon av la oss si Newtons mekanikk innenfor vår ramme. Mer presist skulle det ikke være noe til hinder for å spesifisere en intensjonal språkstruktur L;N over E;1 og et formalt system N over L;N der N kunne oppfattes som en formalisering av den teorien som går under navnet "Newtons mekanikk". L;N bør kanskje tenkes som en svært rik språkstruktur med et stort antall ikke-logiske predikater. Man bør tenke seg at språket inneholder alle de predikatene som trengs for å kunne formulere klassisk analyse og klassisk geometri, videre bør språket ha et rikt forråd av ikke-logiske, rent fysiske predikater som gjør det mulig å beskrive fysiske legmer og egenskaper ved dem, f. eks. deres vekt, hastighet, avstand til andre legmer, i hvilken grad de akselererer, hvilke krefter som virker på dem osv. I L;N kan man derfor tenke seg at umåtelig kompliserte funksjoner kan uttrykkes, videre innviklede funksjonelle forhold mellom fysiske systemer av forskjellig art, differensialligninger av mer eller mindre innfløkt karakter osv. På samme måte som vi kunne definere L;A i L;A, synes det ikke å være noe i veien for at språk av typen L;N kan defineres i L;A og følgelig i L;(E;2). Man kan så formulere mer eller mindre interessante påstander om N og L;N innenfor rammen av L;(E;2), f. eks. at <L;N,n0> utgjør et utvetydig semiformalt språk, at Th(N) Inkl Mg(F: FêCFm(L;N*) & Sann(F,L;N*)) der L;N* = <L;N,n0>. Videre kunne man formulere en rekke satser om aksepterbarheten til N relativt til spesifiserbare evidensmengder, videre satser om forklaringsverdien til N og delsystemer av N. Ytterligere kunne man kanskje tenke seg å formulere setninger om hvilke setninger i L;N som representerer kausallover, osv. Har disse overveielsene noe for seg synes altså muligheten tilstede for at man kunne formulere en rekke interessante utsagn av metateoretisk og vitenskapsteoretisk karakter om Newtons mekanikk innenfor ramme av L;(E;2).

Disse bemerkningene beviser naturligvis ingenting. Virkelig tungt-veiende evidens vil bare vært fremlagt om man faktisk, in concretio, spesifiserte et språk-teori -par av typen <L;N,N>. Kort sagt fremviste en helt konkret formalisering av Newtons mekanikk.

Det som har blitt nevnt ovenfor om termen "Newtons mekanikk" gjelder naturligvis for en rekke andre singulære termer som tilsynelatende referer til forholdsvis velavgrensede teorienheter i forskjellige sammenhenger. Man kan tenke på termer som "Einsteins relativitetsteori", "Bohrs atommodell", "Maxwells teori om elektromagnetiske bølger", "Tarskis sannhetsteori", "Gødels teori om konstruktible mengder", "Cohens forcing-teori", etc. Alle disse uttrykkene (og en rekke lignende uttrykk) er naturligvis temmelig vage og upresise, men det forhindrer ikke at man kan finne interessante presiseringer av dem innenfor rammen av L;(E;2) og derfor uttrykke, og drøfte konsekvensene av, en rekke påstander om disse teorienes logiske struktur, epistemologiske status, forklaringsverdi, grad av prøvbarhet, aksepterbarhet relativt til andre utsagn osv. innenfor rammen av dette språket eventuelt rikere språk.

§6 Bemerkninger om en del aksiomer som kunne tenkes å bli lagt til E:2

I denne paragrafen vil vi betrakte en del formler i L;(E;2) som alle intuitivt sett synes å være uavhengige av E;2, og som det kanskje kunne være rimelig å betrakte som nye aksiomer man eventuelt kunne utvide E;2 med. I alle tilfelle dreier det seg om setninger som det kan ha en

viss interesse å drøfte konsekvensene av innenfor rammen av E;2. De reiser også en del formelle problemer som det kan være av interesse å løse.

Vi betrakter først den følgende formel:

Q1 Cons(Δ) & Δ Inkl (2^I) & (Ax)(xêΔ –> (Ey)(Lov;k(y) & x = l(y)). –>
(Aw)(wêI & (Ax)(xêΔ –> x(w)=1) –> ¬(Et)(têTp &Prv;w(Δ,t)))[19]

Q1 uttrykker at enhver teori som utelukkende inneholder utsagn som representerer lover og som er konsistent ikke er prøvbar ved noe tidspunkt i noen verden der alle utsagnene i teorien er sanne. Hvis denne setningen er sann uttrykker den en egenskap ved lover som man åpenbart bør ta hensyn til.

I lys av det som ble sagt i Kapittel III er det et rent teknisk problem å avgjøre om Q1 er uavhengig av E;2. Det synes rimelig å tro at den er det og at man altså f.eks. kan bevise:

(6.1) (EM;1)(EM;2)(M;1,M;2êI(L;(E;2),L;ê) & Val;(M;1)(Th(E;2)) &
Val;(M;2)(Th(E;2)) & Val;(M;1)(Q1) & Val;(M;2)(¬Q1)

Å gi et formelt bevis for (6.1) må naturligvis bli en komplisert og langtekkelig sak når man ser på hvor kompliserte bevisene i Kapittel III for lignende satser ble. Vi skal derfor ikke gjøre noe forsøk på å bevise (6.1).

En ting er å vise at Q1 konsistent kan legges til E;2 som et nytt ikke-logisk aksiom. En annen ting er å avgjøre sannhetsverdien til denne formelen om det overhodet er mulig. Dette siste er heller ingen lett sak. Vi skal ikke detaljert og utførlig drøfte dette problemet heller, men innskrenker oss til å nevne et teorem i forbindelse med Q1. Satsen er denne:

Teorem 6.1 Anta (i) Q1 og i tillegg at:
(ii) Lov;k(x) & Lov;k(y) & K*;x = N(K*;y)
(iii) A;x = A;y
(iv) (Az)(zêA;x –> zê((2^I)^D) & (Er)(A;x ={r})
Holder disse forutsetningene finnes det ikke noen verden w der man har at konjunksjonen av de følgende betingelser holder:
(a) wêI & Sann;l(x,w) & Sann;l(y,w)
(b) (Et)(Ez)(Eu)(têTp & zêD & uê(2^I) &
c;-1((Neg((iv)(vêA;x)‘ z)),I) Inkl c;-1(u,I) & uêK;(t,w))

I forbindelse med denne satsen må det bemerkes at K*;x er definert som den betingelsen som utgjør konsekventbetingelsen i loven x, ie. er (iz)(zêK;x) og at operasjonen N er definert slik om qê((2^I)^D):

N(q) = ∂xêD(Neg(q(x))).

Det bemerkes da at Neg er den negasjonsoperatoren på utsagn som vi har definert tidligere.

Q1 kan virke noenlunde rimelig. Heller ikke synes det som om Teorem 6.1 viser at det er noe direkte i veien med denne tesen. Likevel er jeg tilbøyelig til å se på påstanden med en viss mistro.

La oss dernest betrakte:

---

19 Se Definisjon 1.5 i §1 i Avsnitt C, Kapittel II.

Q2 Lov;k(x) –> ¬(EΔ)[Δ Inkl (2^I) & Cons(Δ) & l(x) = SNu(Δ)
Δ Inkl Mg(y: (Ez)(Et)(Ew)(VS(y,z,t,w)))]

Også den påstanden virker uavgjørbar i E;2. Dette virker skjønnsmessig bedømt rimelig selv om et uavhengighetsbevis blir komplisert og langt. Man kan kalle mengden Mg(x: (Ey) (Lov(y) & x= l(y))) for mengden av lovutsagn. En teori Δ, dvs. en utsagnsmengde Δ som oppfyller betingelsen

Δ Inkl (2^I) & Cons(Δ) & Δ Inkl Mg(y: (Ez)(Et)(Ew)(VS(y,z,t,w)))

kunne man kalle for en konsistent observasjonell teori. Som man ser innebærer betingelsen at alle utsagnene i Δ er sanne i en eller annen logisk mulig verden – dette innebærer at Δ er konsistent– og dessuten skal det være slik for hvert utsagn yêΔ at det er logisk mulig å tenke seg at et eller annet individ z ved et eller annet tidspunkt t verifiserer riktigheten y ved tidspunktet t. Q2 kan da kortfattet formuleres ved å si at ingen kontingent lov er ekvivalent med konjunksjonen av alle utsagnene i noen konsistent observasjonell teori.

Det virker som om Q1 og Q2 er uavhengige av hverandre i nærvær av E;2. Dette innebærer at dersom Q1 legges til E;2 som et nytt ikke-logisk aksiom vil hverken Q2 eller negasjonen av Q2 være utledbar i den resulterende teori. Tilsvarende vil hverken Q1 eller ¬Q1 være teoremer i E;2[Q2]. Begge formlene synes også å være uavhengige av E;2. Disse påstandene om uavhengighet virker det rimelig å forvente at skulle kunne bevises i E;2.

Vi skal se på flere formler som det kan være av interesse å betrakte. Først introduserer vi imidlertid visse hjelpebegreper ved den følgende definisjon:

Definisjon 6.2(i) V= Mg(y: (Et)(Ez)(Ew)(VS(y,z,t,w)))
(ii) E* = Mg(x: Cons(x) & x Inkl (2^I) & x Inkl V & x≠ø)
(iii) L*(w) = Mg(l(x): Lov;k(x) & Sann;l(x,w))
(iv) C(w) = Mg(y: yê(2^I) & y(w)=1)

V er klassen av alle de utsagn x hvor det er logisk mulig å tenke seg at et eller annet individ ved et eller annet tidspunkt verifiserer x ved sanseiaktagelse. E* er klassen av alle konsistente ikke-tomme utsagnsmengder som er inkludert i V. Man kunne omtale E* som klassen av alle konsistente observasjonelle teorier. L*(w) er klassen av alle de utsagn som representerer kontingente universelle lover som gjelder i verdenen w. Endelig er C(w) klassen av alle de utsagn som er sanne i verdenen w.

Det er nå på sin plass å se på de følgende prinsipper:

Q3 (Ay)(yêE* –> Cd(c;-1(SNu(y),I)) ≥ Aleph;0)
Q4 (Ay)(Aw)(yêE* & wêI & wêc;-1(SNu(y),I)) –>
Cd(Mg(x: Lov;k(x) & Sann;l(x,w))) ≥ Aleph;0)
Q5 (Ay)(Aw)(yêE* & wêI & wêc;-1(SNu(y),I) –>
Cd(Mg(l(x): Lov;k(x) & Sann;l(x,w))) ≥ Aleph;0)
Q6 (Ay)(yêE* –> (EX)(X Inkl c;-1(SNu(y),I) & Cd(X)≥ Aleph;0 &
(Aw1)(Aw2)(w1,w2êX & w1≠w2 –> L*(w1)ΩL*(w2)=ø) &
(Aw)(wêX –> y Inkl k(Mg(x: Eksp(C(w),x,w))))))[20]

20 Angående predikatet "Eksp(Δ,x,w)" bør man se tilbake på §6 i Avsnitt E i Kapittel II.

Alle disse formlene synes å være uavhengige av E;2 isolert sett, men de er ikke innbyrdes uavhengige av hverandre. Det er nokså lett å se at Q6 impliserer Q3, videre at Q5 impliserer Q4. Derimot virker det ikke som om Q6 impliserer Q4 eller Q5, eller som om Q4 eller Q5 impliserer Q3.

Merk at teorien C(w) for hver wêI er komplett i den forstand at man har: (Ay)(yê(2^I) –>. yêk(C(w)) v Neg(y)êk(C(w))). Merk også at k(x), konsekvens-systemet til utsagnsmengden x er klassen av alle de utsagn som er implisert av snittet av alle utsagnene i x. k(x) er definert slik, om x er en utsagnsmengde:

k(x) = Mg(y: c;-1(SNu(x),I) Inkl c;-1(y,I))

Det skulle også være lett å se at C definert ved C= ∂wêI(C(w)) er en en-entydig funksjon.

Formlene Q3 – Q6 synes å uttrykke filosofisk sett interessante påstander i L;(E;2). I forbindelse med Q6 er det nærliggende å nevne en annen formel som er litt sterkere. For å kunne formulere denne noenlunde oversiktlig innfører vi mengden G(w) definert ved:

G(w) = Mg(x: Fk(C(w),x) v (Ez)(Lov(z) & x= l(z) & Ie(C(w),z)))

Merk her at predikatet "Fk(Δ,x)" er definert ved hjelp av Definisjon 7.5 i §7, Avsnitt E, Kapittel II. Det kan leses "x er et utsagn som beskriver et forhold som teorien Δ forklarer hvorfor nødvendigvis må foreligge". Predikatet "Ie(Δ,x)" er definert ved hjelp av Definisjon 7.2 i §7, Avsnitt E, Kapittel II. Det siste predikatet kan leses "Teorien Δ gir en forklaring på den universelle loven x". Gitt denne definisjonen av G(w) kan det noe sterkere prinsippet vi har i tankene formuleres slik:

Q7 (Ay)(yêE* –> (EX)(X Inkl c;-1(SNu(y),I) & Cd(X)≥ Aleph;0 &
(Aw1)(Aw2)(w1,w2êX & w1≠w2 –> L*(w1)ΩL*(w2)=ø) &
(Aw)(wêX –>. G(w)≠ø & y Inkl k(G(w)))))

Det skulle være forholdsvis lett ved litt ettertanke å se at Q7 impliserer Q6. La oss se litt nøyere på hva Q7 sier: Anta (i) yêE*. Da er y ifølge Q7 en konsistent ikke-tom observasjonell teori. I lys av Q7 impliserer (i) at det finnes en mengde X med den følgende egenskap:

(ii) X Inkl c;-1(SNu(y),I) & Cd(X)≥ Aleph;0

Dette innebærer at X er en ikke-tom mengde som er minst tellbart uendelig og som er inkludert i klassen av alle de mulige verdenene hvor alle utsagnene i y er sanne. Med andre ord er det slik at y er sann i minst tellbart uendelig mange verdener. Videre følger det fra Q7 at den X som er slik at (ii) også oppfyller de følgende to krav:

(iii) (Aw1)(Aw2)(w1,w2êX & w1≠w2 –> L*(w1)ΩL*(w2)=ø)

(iv) (Aw)(wêX –>. G(w)≠ø & y Inkl k(G(w)))

Kravet (iii) innebærer at det for ethvert par av distinkte verdener w1,w2êX er slik at de kontingente universelle lovene som gjelder i w1 ikke gjelder i w2 og vice versa. Ser man på definisjonen av G(w) kan man si at G(w) er klassen av alle de utsagn, hva enten det er lovutsagn eller andre som teorien C(w) gir en forklaring på. I lys av disse forklaringene kan man så si at (iv) uttrykker at alle utsagnene i den konsistente observasjonelle teorien y er blandt konsekvensene til G(w).

Sammenfattende, men endel forenklet, kan man altså oppsummere ved å si at Q7 uttrykker at alle konsistente ikke-tomme observasjonelle teorier y er slik at det finnes

uendelig mange distinkte og innbyrdes uforenlige teorier som implisitt gir en forklaring på alle utsagnene i y.

Dette innebærer at Q7 kan oppfattes som en presisering av den tesen som ofte i diskusjoner om metodelære går under navnet av *tesen om teorimangfoldet.*

Den følgende formulering synes å være usammenlignbar med Q7 når det gjelder styrke. Den er altså hverken implisert av Q7 eller impliserer selv Q7:

Q8 (Ay)(yêE* & (Az)(zêy –> J(z)). –>
(EX)(X Inkl c;-1(SNu(y),I) & Cd(X)≥ Aleph;0 &
(Aw1)(Aw2)(w1,w2êX & w1≠w2 –> L*(w1)ΩL*(w2)=ø) &
(Aw)(wêX –>. y Inkl Mg(x: Fk(C(w),x)))))

Også denne formuleringen kan oppfattes som en presisering av tesen om teorimangfoldet. Vi vil formulere nok en versjon av denne tesen. For dette formål trenger vi den følgende definisjon.

Definisjon 6.3

(i) E;c(x) <–> (E(x) & CLov(x))
(ii) Fk;c(Δ,x) <–> (Δ Inkl (2^I) & xê(2^I) &
(Ey)(E;c(y) & Imp;e(Δ,y) & x= (ir)(rêK;((y);1)((y);3))))
(iii) Ie;c(Δ,x) <–> (Eq)(CLov(q) & x = l(q) & Δ Inkl (2^I) &
(E∏)(R(∏,q) & ∏ Inkl Mg(x: CLov(x)) &
c;-1(SNu(Δ),I) Inkl c;-1(SNu(Mg(l(x): xê∏)),I)))

Den følgende sats er en umiddelbar konsekvens av Definisjon 6.3 og de definisjoner vi tidligere har gitt av blandt annet predikatene "E(x)" ("x er en E-struktur"), og "R(Δ,x)", som kan leses "Δ er en samling av innbyrdes uavhengige lover som samlet impliserer loven x":

Lemma 6.4 (i) E;c(x) –> E(x)
(ii) Ie;c(Δ,x) –> (Ez)(Lov(z) & x=l(z) & Ie(Δ,z))
(iii) Fk;c(Δ,x) –> Fk(Δ,x)
(iv) Mg(x: Ie;c(Δ,x) v Fk;c(Δ,x)) Inkl
Mg(x: (Ez)(Lov(z) & x=L(z) & Ie(Δ,z)) v Fk(Δ,x))

I lys av denne hjelpesetningen innser man umiddelbart at den følgende formulering er sterkere enn Q8:

Q9 (Ay)(yêE* & (Az)(zêy –> J(z)). –>
(EX)(X Inkl c;-1(SNu(y),I) & Cd(X)≥ Aleph;0 &
(Aw1)(Aw2)(w1,w2êX & w1≠w2 –> L*(w1)ΩL*(w2)=ø) &
(Aw)(wêX –>. y Inkl Mg(x: Fk;c(C(w),x)))))

Vedrørende Q1 – Q9 synes det rimelig å tro at de alle er uavhengige av E;2 enkeltvis. Dette innebærer at man ikke av rent logiske grunner er tvunget til å godta noen av disse prinsippene selv om man godtar E;2. Men det innebærer på den annen side at man uten at det oppstår

motsigelser kan legge hver enkelt av disse formlene til E;2 som nytt ikke-logisk aksiom. De følgende to gjetninger er derfor etter vår mening plausible.

Gjetning 1 (i) (EM)(MêI(L;(E;2),L;ê) & Val;M(E;2) & Val;M(Qi)) om i=1,..,9
(ii) (EM)(MêI(L;(E;2),L;ê) & Val;M(E;2) & Val;M(¬Qi)) om i=1,..,9

Er denne gjetningen riktig skulle man ha at det følgende gjelder:

Konsis(ZFC) –> (Ai)(iê{1,...,9) –> Uav(Qi, E;2)

Det virker også som om man skulle forvente at det følgende kunne la seg bevise, nemlig at det finnes en mengdeteoretisk intepretasjon av L;(E;2) inn i L;ê som overfører alle teoremene i teorien E;2 utvidet med Q1 –Q9 som ikke-logiske aksiomer til teoremer i ZFC. Formelt formulert:

Gjetning 2 (EM)(MêI(L;(E;2),L;ê) & Val;M(E;2[Q1, Q2,.....,Q9]))

Setter man T = E;2[Q1, Q2,.....,Q9] impliserer denne gjetningen:

Konsis(ZFC) –> Konsis(T)

Vi skal nå forlate tesen om teorimangfoldet for å betrakte en helt annen tese. Det dreier seg om den følgende formulering:

Q10 (Ax)((xê(2^I) & (Ew)(wêI & x(w)=0) & (Ew)(wêI & x(w)=1)) –>
(Ez)(zêE* & x = SNu(z))

Et utsagn som oppfyller antesedentbetingelsen i Q10 kalles for et kontingent utsagn. Som man ser er dette et utsagn som er sant i noen mulige verdener og usant i andre. Det er rimelig å si at dersom xêV (Se Definisjon 6.2) er x et utsagn som det er logisk mulig for en eller annen ved et eller annet tidspunkt å verifisere ved sanseiaktagelse. I lys av dette er det klart at Q10 sier at ethvert kontingent utsagn er logisk ekvivalent med konjunksjonen av en konsistent mengde med utsagn der hvert av utsagnene er et utsagn som det logisk sett er mulig å tenke seg at har blitt verifisert ved sanseiaktagelse. Dette er en temmelig ytterliggående påstand. Merk at dette prinsippet ikke, slik det er formulert her, er noe kriterium for meningsfullhet ved setninger. Men antar man at enhver setning i et språk er "kognitivt meningsfull" hvis og bare hvis den uttrykker et kontingent utsagn, dvs. et utsagn der det er mulig å tenke seg en verden hvor det er sant og der det er mulig å tenke seg en verden hvor det er feilaktig, så impliserer Q10 en nødvendig betingelse for meningsfullhet i forbindelse med setninger. Man kan derfor si at Q10 er beslektet med de logiske positivistenes meningskriterium. Vi skal kalle Q10 for *det positivistiske verifikajonsprinsipp*.
Det er mulig å formulere en relatert, beslektet, versjon av dette prinsippet på den følgende måte:

Først definerer vi SF(x). Dette er den minste utsagnsmengden som inneholder utsagnsmengden x og som er lukket under operasjonene snitt og negajon. Den formelle definisjonen av dette begrepet er:

Definisjon 6.4 SF(x) = SN(Mg(Z: Z Inkl (2^I) & x Inkl Z &
(Aw)(w Inkl Z –> SNu(w)êZ) & (Aw)(wêZ –> Neg(w)êZ)))

Vi kan åpenbart definere de utsagnslogiske operasjonene disjunksjon, endelig konjunksjon, materiell implikasjon og materiell biimplikasjon innenfor den rammen vi opererer med her. Siden disse operasjonene kan defineres ved hjelp av operasjonene SNu og Neg følger det at SF(x), om x er en utsagnsmengde, også er lukket under de nevnte operasjoner. Vi skal tillate oss å si – selvom dette ikke er helt treffende – at utsagnet y er en sannhetsfunksjon i vid forstand av utsagnene i x hvis og bare hvis yêSF(x).

Den relaterte tesen kan formuleres slik:

Q11 (Ax)((xê(2^I) & (Ew)(wêI & x(w)=0) & (Ew)(wêI & x(w)=1)) –>
(Ez)(zêE* & Uavh(z) & xêSF(z))

Q11 uttrykker at ethvert kontingent utsagn er en sannhetsfunksjon i vid forstand av utsagnene i en konsistent observasjonell teori z der alle utsagnene i z er uavhengige av hverandre. Det bør bemerkes at vi benytter Definisjon 3.15 i §3, Avsnitt E, Kapittel II som definisjon av "Uavh(z)". Hvis man føyer til at z skal være uavhengig i denne forstand i Q10 ser man lett at man får et prinsipp som impliserer Q11 fordi x=SNu(z) åpenbart impliserer at xêSF(z) slik operajonen SF har blitt definert ovenfor. Vi skal kalle Q11 for det svake positivistiske verifikasjonsprinsipp.

Innenfor rammen av E;2 synes Q10 og Q11 å være, deduktivt sett, temmelig sterke postulater som avgjør en rekke spørsmål. Vi vil ha mer å si om disse prinsippene nedenfor. Akkurat på dette punkt bemerker vi at det er liten grunn til å tro at disse setningene uttrykker sanne utsagn i L;(E;2).

Før vi tar for oss verifikasjonsprinsippene som har blitt nevnt til nærmere drøftelse skal vi igjen formulere visse teser i L;(E;2) som har en viss sammenheng med prinsippene Q7 – Q9. Først definerer vi:

Definisjon 6.5 Vi setter:

(i) j;x = {l((x);1)} U Rgn((x);2)

(ii) C2(f,X) <–> (Ay)(yêX –> J(y)) & Func(f) & Dom(f) = X &
Rgn(f) Inkl Mg(x: E(x)) & Cons(UN/xêRgn(f)/(j;x)) &
(Az)(zêX –> z= [(ir)(rêK;((f(z));1)]‘ (f(z));3)

Anta x er en E-struktur slik dette begrep er definert ved Definisjon 6.1 i §6, Avsnitt E, Kapittel II. Da er x et triple <£,g,z> hvor £ er en lov og g en instansiering av antesedentbetingelsene i loven med hensyn på tuplet zêD^n (n≥1). Er dette tilfellet har vi at l((x);1) er det lovutsagnet som svarer til loven £ og at (x);2 er alle de enkelte instanser av antesedentbetingelsene i £ med hensyn på z. Dette vil da være en klasse av utsagn. Endelig vil (x);3 være den tredje komponenten i E-strukturen <£,g,z>.

C2(f,X) innebærer at X er en samling med utsagn der alle utsagnene er instanser av konsekvent betingelser i lover og f er en funksjon som tilordner alle utsagnene i X E-strukturer slik at hvis yêX så er y en instans av konsekvent-betingelsen i f(y);1, dvs. loven i E-struktren f(y) og som videre er slik at UN/xêRgn(f)/(j;x) er konsistent.

Vi definerer så TS(a,X) hvor a er et ordinaltall og X en mengde med utsagn slik:

Definisjon 6.6TS(a,X) er mengden av alle de sekvenser y som oppfyller de følgende krav:

(i) SEQ(y) & Dom(y) = a &Rgn(y) Inkl Mg(f: C2(f,X))

(ii) (Am)(An)(m,n<a & m≠n. –>
¬Cons(UN/xêRgn(y(m))/(j;x) U UN/xêRgn(y(n))/(j;x)))

Vår nye teorimangfoldtese kan så formuleres slik:

Q12 (Ay)(yêE* & (Az)(zêy –> J(z)). –> TS(Aleph;0,y) ≠ø)

Q12 er åpenbart ekvivalent med:

Q13 (Ay)(yêE* & (Az)(zêy –> J(z)) –> (Ea)(aêOn & a≥ Aleph;0 & TS(a,y)≠ø))

Det er også forsåvidt mulig, som en ren teoretisk mulighet, å studere teorien man får når man legger til det følgende aksiom til E;2 for alle aêOn :

Q14(a) (Ay)(yêE* & (Az)(zêy –> J(z)). –> TS(Aleph;a,y) ≠ø)

I det følgende skal vi bevise enkelte satser i forbindelse med de prinsippene og begrepene som har blitt innført ovenfor:

Teorem 6.7 C2(f,X)–> (Ay)(yêX –> Fk(UN/zêRgn(f)/(j;z),y))

Bevis:[21] Anta (1) C2(f,X) og (2) yêX. Fra definisjonen av C2 har man:

(3) (Ay)(yêX –> J(y)) & Func(f) & Dom(f) = X &
Rgn(f) Inkl Mg(x: E(x)) & Cons(UN/xêRgn(f)/(j;x)) &
(Az)(zêX –> z= [(ir)(rêK;((f(z));1)]‘ (f(z));3)

La oss sette Δ = UN/xêRgn(f)/(j;x). Da har man ved hjelp av definisjonen av j;z og (3) at (4) Teori(Δ). Fra (2) og den første konjunkten i (3) følger J(y) og fra dette har man i kraft av definisjonen av J at (5) yê(2^I). Fra (2) og (3) følger også: (6) E(f(y)) & y= [(ir)(rêK;((f(y));1)]‘ (f(y));3). Det er klart i lys av definisjonen av Imp;e at (7) Imp;e(Δ,f(y)). Fra (4) – (7), samt definisjonen av Fk følger så Fk(Δ,y). Dette impliserer Fk(UN/xêRgn(f)/(j;x) ,y). **Q.E.D.**

La oss dernest studere den følgende sats:

Teorem 6.8 (E;2) Anta Q12 & XêE* & (Az)(zêX –> J(z)). Da finnes det en y med følgende egenskaper:

(i) SEQ(y) & Dom(y) = Aleph;0

(ii) Rgn(y) Inkl Pt(2^I)

(iii) (Am)(m<Aleph;0 –> (Az)(zêX –> Fk(y(m),z)))

(iv) (Am)(An)(m,n<Aleph;0 & m≠n –> ¬Cons(y(m)Uy(n)))

---

21 I forbindelse med dette beviset bør man konsultere §6, i Avsnitt E, Kapittel II.

Bevis: Anta (1) Q12 & XêE* & (Az)(zêX –> J(z)). Fra dette følger umiddelbart TS(Aleph;0,X)≠ø. Fra dette følger ved hjelp av Definisjon 6.6 at det finnes noe y0 der man har:

(2.1) SEQ(y0) & Dom(y0) = Aleph;0 &Rgn(y0) Inkl Mg(f: C2(f,X))

(2.2) (Am)(An)(m,n<Aleph;0 & m≠n. –>
¬Cons(UN/xêRgn(y0(m))/(j;x) U UN/xêRgn(y0(n))/(j;x)))

Vi definerer nå en ny sekvens s ved å sette:

s(m) = UN/xêRgn(y0(m))/(j;x) for alle mêAleph;0

Mer formelt kan man sette:

s = Mg(<m,UN/xêRgn(y0(m))/(j;x)>: mêAleph;0)

Man har da:

(3) SEQ(s) & Dom(s)=Aleph;0

Videre må man ha:

(4) (Am)(mêAleph;0 –> UN/xêRgn(y0(m))/(j;x) Inkl (2^I))

Det følger at (5) Rgn(s) Inkl Pt(2^I). Anta nå m<Aleph;0 for vilkårlig m. Da er mêDom(y0) og det følger derfor i lys av (2.1) at (6) C2(y0(m),X). Fra dette, definisjonen av s og Teorem 6.7 følger derfor (7) (Az)(zêX –> Fk(y(m),z)). Vi har derfor bevist:

(8) (Am)(m<Aleph;0 –> (Az)(zêX –> Fk(y(m),z)))

Fra (2.2) og definisjonen av s følger også:

(9) (Am)(An)(m,n<Aleph;0 & m≠n –> ¬Cons(s(m)Us(n)))

Som man ser impliserer (3), (5), (8) og (9) det vi ønsker. **Q.E.D.**

La oss så gi bevis for den følgende sats:

Teorem 6.9 (E;2) Q12 –> (Ay)(yêE* & (Az)(zêy –>J(z)). –>
(EX)(X Inkl c;-1(SNu(y),I) & Cd(X)≥Aleph;0 &
(Aw)(wêX –> y Inkl Mg(x: Fk(C(w),x)))))

Bevis: Anta (1) Q12 & yêE* & (Az)(zêy –>J(z)) for vilkårlig y. Fra dette og Definisjon 6.6 følger det at det finnes en sekvens s med de følgende egenskaper:

(2.1) SEQ(s) & Dom(s) = Aleph;0 &Rgn(s) Inkl Mg(f: C2(f,y))

(2.2) (Am)(An)(m,n<Aleph;0 & m≠n. –>
¬Cons(UN/xêRgn(s(m))/(j;x) U UN/xêRgn(s(n))/(j;x)))

La oss sette, om wêI og XInkl (2^I), per definisjon:

Tr(w,X) <–> (Ay)(yêX –> y(w)=1)

Fra (2.2) følger da:

(3) (Am)(An)(m,n<Aleph;0 & m≠n. –>
Mg(w: Tr(w,UN/xêRgn(s(m))/(j;x)))Ω
Mg(w: Tr(w,UN/xêRgn(s(n))/(j;x)))=ø))

La oss nå definere s1 ved:

s1 = Mg(<m, Mg(w: Tr(w,UN/xêRgn(s(m))/(j;x)))>: mêAleph;0)

Man har da åpenbart at s1 er en funksjon og at alle mengdene i verdiområdet til denne funksjonen er ikke-tomme og disjunkte. Ved hjelp av utvalgsaksiomet kan man da slutte at det finnes en funksjon Z med følgende egenskaper:

(5.1) Func(Z) & Dom(Z) = Aleph;0

(5.2) (Am)(mêAleph;0 –> Z(m)ês1(m).

Det skulle være klart at (6) Cd(Rgn(Z)) ≥Aleph;0. Vi ønsker nå å vise:

(+) Rgn(Z) Inkl c;-1(SNu(y),I)

Anta derfor for vilkårlig z0 at (7) z0êRgn(Z). Da finnes det mêAleph;0 slik at z0=Z(m). Vi har ved hjelp av (5.2) at

Z(m)ês1(m) = Mg(w: Tr(w,UN/xêRgn(s(m))/(j;x))). Fra dette følger:

(8) Tr(Z(m), UN/xêRgn(s(m))/(j;x)). Nå har man (2.1) at C2(s(m),y). Ved hjelp av definisjonen av C2 følger fra dette:

(Aw)(wêI & Tr(w, UN/xêRgn(s(m))/(j;x)) –> Tr(w,y))

I lys av (8) må man der for ha, siden Z(m)êI at Tr(Z(m),y). Men fra dette følger nokså åpenbart at z0=Z(m)êc;-1(SNu(y),I). Dette viser at (+) holder.

Det gjenstår imidlertid å bevise:

(++) (Aw)(wêRgn(Z) –> (Az)(zêy –> Fk(C(w),z)))

Anta derfor for vilkårlige w,z at (9) wêRgn(Z) & yêz. Man har da w=Z(m) for noe mêAleph;0 og derfor, på samme måte som ovenfor, at:

(9.1) Tr(Z(m), UN/xêRgn(s(m))/(j;x))

Siden C2(s(m),y) har man i lys av (9) og Teorem 6.7:

(10) Fk(UN/xêRgn(s(m))/(j;x),z). Men fra (9.1)og det at w= Z(m) følger: UN/xêRgn(s(m))/(j;x) Inkl C(w). Fra dette, (10) og definisjonen av Fk følger Fk(C(w),z). Dette viser at (++) holder.

Fra (6), (+) og (++) følger:

(EX)(X Inkl c;-1(SNu(y),I) & Cd(X)≥Aleph;0 &
(Aw)(wêX –> y Inkl Mg(x: Fk(C(w),x))))

Dermed har vi gitt et fullstendig bevis for satsen. **Q.E.D.**

Som man ser fra Teorem 6.9 har vi at Q12 impliserer en avsvekket versjon av Q8. Som et enkelt korollar til Teorem 6.9 har man:

Teorem 6.10 (E;2) Q12 –> (Ay)(yêE* & (Az)(zêy –> J(z)). –>
Cd(c;-1(SNu(y),I))≥ Aleph;0)

Fra dette følger så:

Teorem 6.11 (E;2) Q12 & (Ay)(yêE* –> y Inkl Mg(z: J(z))). –> Q3

Denne satsen har imidlertid begrenset interesse siden den andre forutsetningen virker svært tvilsom. Satsen nevnes likevel fordi den viser at det er en viss sammenheng mellom Q12 og Q3.

I forbindelse med Q12 – Q14(a) synes det rimelig å gjette på at Q12 er uavhengig av E;2 og videre at Q14(a) er uavhengig av E;2 for alle aêOn. Men som nevnt tidligere i forbindelse med lignende gjetninger er det naturlig nok en meget vidløftig sak å gi detaljerte bevis for dette.

Vi vil nå se litt nærmere på forholdet mellom Q10, det positivistiske verifikasjonsprinsipp, og Q3. Vi vil bevise den følgende sats som viser at dette verifikasjonsprinsippet er uforenlige med en temmelig svak versjon av teorimangfoldtesen, nemlig Q3:

Teorem 6.12 Q3 & E*≠ø –> ¬ Q10

Bevis: Anta for reduktio ad absurdum at (1) Q3 & E*≠ø & Q10. Fra de to første konjunktene i (1) følger eksistensen av noe z der:

(2) zêE* & Cd(c;-1(SNu(z),I))≥ Aleph;0

Fra dette følger at det finnes wêI slik at (3) wêc;-1(SNu(z),I). Vi definerer k ved å sette h = c({w},I). Det er da klart at

hê(2^I) & (Er)(rêI & h(r)=1) & (Er)(rêI & h(r)=0)

Den siste konjunkten her følger fra definisjonen av h og den andre konjunkten i (2). I lys av dette og Q10, dvs. siste klausul i (1), må man ha:

(Ez)(zêE* & h= SNu(z)). Det finnes følgelig y slik at (4) yêE* & h=SNu(y). Fra dette og Q3 følger (5) Cd(c;-1(SNu(y),I))≥Aleph;0. Fra (4) og definisjonen av h har man imidlertid:

(6) Cd(c;-1(h,I)) = Cd(c;-1(SNu(y),I)) = Cd({w}) =1. Dette strider åpenbart mot (5). Dette viser at det er umulig at (1) holder. **Q.E.D.**

Vi vil også nå vise at Q3 harmonerer svært dårlig med det vi kalte det svake positivistiske verifikasjonsprinsipp. Mer nøyaktig ønsker vi å bevise den følgende sats:

Teorem 6.13 Q3 & (Ez)(zêE* & Uavh(z)) &
(Ax)(xê(2^I) & xêV –> Neg(x)êV). –> ¬Q11

Det virker ikke urimelig å tro at den andre og tredje forutsetningen i denne satsen kan oppfattes som sanne setninger i L;(E;2). Er x f.eks. et utsagn som det er logisk mulig for et eller annet individ å verifisere ved sanseiaktagelse ved et eller annet tidspunkt, så synes det ikke urimelig å tro at det også er logisk mulig for en eller annen å verifisere Neg(x) ved et eller annet tidspunkt. Når det gjelder den andre forutsetningen sier denne at det fines en konsistent observasjonell teori hvor utsagnene i teorien er strengt uavhengige av hverandre. Det virker som om dette er e meget svak påstand.

For å bevise Teorem 6.13 trenger vi en hjelpesetning. Vi definerer først:

Definisjon 6.14 Anta x Inkl (2^I). Da setter man:
T(x) = Mg(y: y Inkl (x U Neg"x))

Man kunne kalle T(x) for klassen av tilstandsbeskrivelser assosiert med utsagns-mengden x. Den hjelpesetningen vi trenger kan formuleres slik:

Lemma 6.15 (x Inkl (2^I) & Cons(x) & x≠ø & Uavh(x)) –>
(Ay)(yêSF(x) –> (Ez)(z Inkl T(x) & y = UN/wêz/(SNu(w))))

Denne setningen at dersom x er en konsistent, ikke-tom utsagnsmengde der elementene er strengt uavhengige av hverandre kan ethvert utsagn som er en sannhetsfunksjon i vid forstand over x skrives på disjunktiv normalform, dvs. som en disjunksjon av konjunktive tilstandsbeskrivelser over x.

Vi skal gi et bevis for denne påstanden senere. Vi starter med å gi beviset for Teorem 6.13 hvor vi benytter denne hjelpesetningen.

Bevis for Teorem 6.13: Anta for reduktio ad absurdum at :

(1) Q3 & (Ez)(zêE* & Uavh(z)) & (Ax)(xê(2^I) & xêV –> Neg(x)êV)

Fra de to første konjunktene her utleder man at det finnes en z med de følgende egenskaper : (2) zêE* & Uavh(z) & Cd(c;-1(SNu(z),I))≥ Aleph;0. Det må da finnes w der (3) wêc;-1(SNu(z),I). Vi definerer h ved å sette: h = c({w},I). Da har man i lys av (2) og (3) at:

(4) hê(2^I) & (Er)(rêI & h(r)=1) &(Er)(rêI & h(r)=0)

Fra (4) og Q11 følger det at det finnes y der man har:

(5) yêE* & Uavh(y) & hêSF(y)

Siden yêE* har man ved hjelp av definisjonen av E* at y Inkl (2^I) & Cons(y). Dette, (5) og Lemma 6.15 impliserer: (6) (EJ)(J Inkl T(y) & h = UN/xêJ/(SNu(x))). Det må derfor selvfølgelig finnes noe J der:

(7) J Inkl T(y) & h = UN/xêJ/(SNu(x)). Den siste konjunkten i dette uttrykket impliserer:

(8) (Aw)(wêI –> (h(w)=1 <–> UN/xêJ/(SNu(x))‘w=1))

Siden h(w) =1 & wêI har man ved hjelp av (8): UN/xêJ/(SNu(x))‘w=1. Fra dette følger i sin tur eksistensen av x der:

(9) xêJ & (SNu(x))‘w =1. Fra (7) og (9) følger at xêT(y) og derfor i lys av definisjonen av T(y) at (10) x Inkl (yUNeg"y). Videre har man ved hjelp av (5) og (9) at (11) Cons(x) & yêE*.

Anta nå for vilkårlig u at uêx. Da har i lys av (10) at uê(yUNeg"y).

Tilfelle (i): uêy. iden yêE* har man at y Inkl V og derfor at uêV

Tilfelle (ii): uêNeg"y. Da finnes q slik at qêy & u=Neg(q). Siden y Inkl V i lys av (11) og definisjonen av E* følger at qêV. Men fra dette, det at u=Neg(q) og den tredje konjunkten i (1) følger at u=Neg(q)êV.

I begge tilfellene har man altså at uêV. Det følger at vi har bevist:

(12) x Inkl V

Anta nå for reduktio ad absurdum at x=ø. Da har man siden:

SNu(x) = c(Mg(w: wêI & (Ay)(yêx –> y(w)=1)),I) at SNu(x)= c(I,I). Men siden Cd(c;-1(SNu(z),I)) ≥ Aleph;0 og c;-1(SNu(z),I) Inkl I har man at Cd(I)≥Aleph;0. Derfor følger at I–{w}≠ø. Da følger at det finnes w1 der w1ê(I–{w}). Siden SNu(x)=c(I,I) har man at (SNu(x))(w)=1. På den annen side har man i lys av definisjonen av h at h(w1)=0. Derfor (SNu(x))(w)=1 & h(w1)=0. Dette strider imidlertid mot (8). Man må følgelig ha: (13) x≠ø.

Fra den første konjunkten i (11), (12), og (13) følger at xêE*. Men dette og den første konjunkten i (1), Q3, impliserer: Cd(c;-1(SNu(x),I))≥Aleph;0. Siden c;-1(SNu(x),I) Inkl c;-1(UN/xêJ/(SNu(x)) ,I) = c;-1(h,I) følger Cd(c;-1(h.I))≥Aleph;0. Men fra definisjonen av h har man åpenbart at Cd(c;-1(h,I))=1. Dette gir oss en klar motsigelse. Det følger at (1) ikke holder. **Q.E.D.**

Vi skal nå gi et detaljert bevis for Lemma 6.15:

Bevis for Lemma 6.15: Siden SF(x) er definert induktivt bevises påstanden ved induksjon på SF(x). Basistrinnet er uproblematisk:

(i) (Basistrinn) Anta yêx. Da er y = SN({y}) & {y} Inkl xUNeg"x. Man har derfor {y}êT(x). Setter man derfor z = {{y}} så har man

z Inkl T(x) & y = UN/wêz/(SNu(w))

Satsen holder altså i dette tilfellet.

(ii) (Induksjonstrinn I) Anta:

(1) rêSF(x) & (Ez)(z Inkl T(x) & r = UN/wêz/(SNu(w))). Vi ønsker å vise at man da har:

(+) (Ez)(z Inkl T(x) & Neg(r) = UN/wêz/(SNu(w)))

Fra (1) har man for noe z at:

(2) z Inkl T(x) & r = UN/wêz/(SNu(w)). Nå har man:

(3) Neg(r) = Neg(UN/wêz/(SNu(w)) = SNu/wêz/(Neg(SNu(w)))
= SNu/wêz/(UN/jêw/(Neg(j)))

Vi trenger nå den følgende påstand:

(4) SN/iêA/(UN/jêB/(b(i,j))) = UN/fê(B^A)/(SN/iêA/(b(i,f(i)))

Beviset for (4) går slik: Anta for vilkårlig u at uêSN/iêA/(UN/jêB/(b(i,j))). Da har man (Ai)(iêA –> (Ej)(jêB & uêb(i,j))). Ved hjelp av utvalgsaksiomet kan man da slutte at det finnes en funksjon fê(B^A) som er slik at

(Ai)(iêA –> uêb(i,f(i))). Vi har med andre ord at (Ef)(fê(B^A) & uêSN/iêA/(b(i,f(i))). Herav: uêUN/fê(B^A)/(SN/iêA/(b(i,f(i))).

For å bevise inklusjonen mot venstre i (4) antar man for vilkårlig u at:

uêUN/fê(B^A)/(SN/iêA/(b(i,f(i)))). Da finnes fê(B^A) slik at: (Ai)(iêA –> uêb(i,f(i))). Anta iêA for vilkårlig i. Da har man f(i)êB & uêb(i,f(i)). Herav: (Ej)(jêB & uêb(i,j)). Siden i var vilkårlig følger:

(Ai)(iêA –> (Ej)(jêB & ûêb(i,j)))). Det følger at uêSN/iêA/(UN/jêB/(b(i,j))). Dermed har vi vist at (4) holder.

Man kan nå enummerere de enkelte elementer i z. Dette innebærer det finnes s og aêOn slik at: s: a –(1-1,på)–> z. La nå b være kardinaltallet til mengden x UNeg"x. Vi har da at dersom u er et eller annet element i T(x) så er u inkludert i xU Neg"x. I så fall må man ha at kardinaltallet til u er mindre eller lik b. Siden de diverse s(i) for iêa er med i z der z Inkl T(x) følger det at s(i)êT(x), og derfor at kardinaltallet til s(i) er mindre enn b. Siden Neg er en en-entydig funksjon følger det også at kardinaltallet til Neg"s(i) er mindre enn b for alle iêa. Det følger at vi for hvert iêa kan plukke ut en funksjon q(i) der vi har at Rgn(q(i)) = Neg"s(i) og Dom(q(i))=b. Med andre ord vil q(i) for hvert ordinaltall iêa være en funksjon som avbilder b på Neg"s(i). Vi kan nå la a og b være våre indeksmengder, og vi definerer en funksjon ß: aXb –> UN(z) ved:

(5) ß(i,j) = (q(i))(j) for <i,j>ê(aXb)

Det er nå mulig å bevise:

(6) SN/wêz/(UN/jêw/(Neg(j))) = SN/iêa/(UN/jêb/(ß(i,j)))

La oss gi et bevis for (6): Anta u er et vilkårlig element i I. Da har man på den ene side:

(7) SN/wêz/(UN/jêw/(Neg(j)))‘u =1 <–>
(Aw)(wêz –> (UN/jêw/(Neg(j)))‘u=1) <–>
(Aw)(wêz –> (Ej)(jêw & Neg(j)‘u =1))

På den annen side har man:

(8) SN/iêa/(UN/jêb/(ß(i,j)))‘u =1 <–>
(Ai)(iêa –> (Ej)(jêb & ß(i,j)‘u =1))

Vi vise at siste høyre side i ekvivalensrekken (7) er ekvivalent med høyre side i (8). Anta derfor at høyre side i (7) holder og at iêa for vilkårlig i. Da har vi at s(i)êz ifølge definisjonen av s og følgelig at (Ej)(jês(i) & Neg(j)‘u=1). Dette impliserer (Er)(rêNeg"s(i) & r‘u=1). Det finnes altså r slik at rêNeg"s(i) & r‘u=1. Men da har vi rêRgn(q(i)) og det må finnes jêb slik at r= q(i)(j) = ß(i,j). Vi har med andre ord (Ej)(jêb & ß(i,j)‘u =1).

Anta på den annen side at at høyre side i (8) holder og at wêz for vilkårlig w. Da må det finne iêa slik at w=s(i). Det må følgelig siden høyre side i (8) holder finnes j der jêb & ß(i,j)‘u =1. Nå har man:

ß(i,j) = q(i)(j) êRgn(q(i)) = Neg"s(i)

Det finnes derfor kêNeg"s(i) slik at k= q(i)(j). Herav k = Neg(r) for noe rês(i)=w. Men k=ß(i,j) = q(i)(j) og ß(i,j)‘u =1 følger k‘u=1. Vi har derfor:

(Ej)(jêw & Neg(j)‘u =1). Dermed har vi gitt et fullstendig bevis for (6).

I lys av (3), (4) og (6) har man:

(9) Neg(r) = UN/fê(b^a)/(SNu/iêa/(ß(i,f(i))))

Nå har vi i lys av konstruksjonen av ß at ß(i,f(i))ê (xU Neg"x) om iêa og fê(b^a). La oss definere Z;f ved:

Z;f = Mg(ß(i,f(i)): iêa) om fê(b^a). og dessuten sette:

Z(0) = Mg(Z;f: fê(b^a))

Man kan da bevise:

(10) UN/fê(b^a)/(SNu/iêa/(ß(i,f(i)))) = UN/zêZ(0)/(SNu(z))

La oss først bevise inklusjonen mot høyre:

Anta UN/fê(b^a)/(SNu/iêa/(ß(i,f(i))))‘u=1 for vilkårlig uêI. Da finnes fê(b^a) der SNu/iêa/(ß(i,f(i)))‘u =1. Herav følger så:

fê(b^a) & (Ai)(iêa –> ß(i,f(i))‘u =1).

Fra definisjonen av Z;f og Z(0) følger at Z;fêZ(0). Anta rêZ;f for vilkårlig r. Da finnes iêa slik at r= ß(i,f(i)). Det følger at man må ha r‘u = ß(i,f(i))‘u =1. Vi har altså bevist:

(11) (Er)(rêZ(0) & (Ak)(kêr –> k‘u=1) ie UN/zêZ(0)/(SNu(z))‘u=1

Anta på den annen side at (11) holder. Da finnes r slik at:

rêZ(0) & (Ak)(kêr –> k‘u=1) Fra dette og definisjonen av Z(0) følger det at det finnes f der fê(b^a) & r = Z;f. Er da iêa har vi ß(i,f(i))êZ;f. Men da ß(i,f(i))‘u =1. Det følger at UN/fê(b^a)/(SNu/iêa/(ß(i,f(i))))‘u=1. Dermed har vi gitt et fullstendig bevis for (10).

Det skulle være klart at Z;f Inkl (xU Neg"x) og derfor at (12) Z(0) Inkl T(x). Fra (9), (10) og (12) følger derfor (+).

(iii) (Induksjonstrinn II). Som induksjonshypotese antar vi:

(1) Y Inkl F(x) og

(2) (Az)(zêY –> (Ew)(w Inkl T(x) & z = UN/rêw/(SNu(r))))

Vi ønsker, gitt (1) og (2), å bevise:

(++) (Ew)(w Inkl T(x) & SN(Y) = UN/rêw/(SNu(r)))

Fra (2) følger at J;0(z) = Mg(w: w Inkl T(x) & SN(Y) = UN/rêw/(SNu(r))) er ikke-tom for alle zêY. Ved hjelp av utvalgsaksiomet kan man da slutte at det finnes en funksjon g der:

Dom(g) = Y og

(Az)(zêY –> g(z)êJ;0(z))

For denne funksjonen gjelder:

(Az)(zêY –>(z= UN/rêg(z)/(SNu(r)) & g(z) Inkl T(x))). Man har derfor:

(3) SN(Y) = SN/zêY/(UN/rêg(z)/(SNu(r)))

I lys av velordningsteoremet må det finnes en enummerering s av av Y. Med andre ord må det finnes s der:

s: a –(1-1,på)–> Y for noe ordinaltall aêOn.

Fra definisjonen av g ser man at g(z)êPt(T(x)) for alle zêY. Vi lar b være kardinaltallet til T(x). Siden g(z) Inkl T(x) har vi da at kardinaltallet til g(z) må være mindre eller lik b for alle zêY. Dette innebærer at kardinaltallet til g(s(i)) er mindre eller lik b for alle iêa. Man kan derfor for hvert iêa plukke ut en funksjon ∂(i) der Rgn(∂(i)) = g(s(i)) og hvor Dom(∂(i)) = b. Vi definerer så en funksjon ß (som ikke må blandes sammen med den ß som vi arbeidet med under (ii)) ved:

ß(i,j) = SN(∂(i)‘j) om <i,j>ê (aXb)

Man har da:

(4) SN/zêY/(UN/rêg(z)/(SNu(r))) = SN/iêa/(UN/jêb/(ß(i,j))).

La oss gi et bevis for (4):

Anta SN/zêY/(UN/rêg(z)/(SNu(r)))‘u =1 for vilkårlig uêI. Dette innebærer:

(5) (Az)(zêY –> (Er)(rêg(z) & (SN(r))‘u = 1)). Vi må vise at:

(Ai)(iêa –> (Ej)(jêb & (ß(i,j))‘u =1)). Anta derfor iêa for vilkårlig i. Da har man s(i)êY og i følge (5) må vi da ha at det eksisterer r der rêg(s(i)) & SN(r)‘u = 1. Siden rêg(s(i)) må det finnes jêb slik at r= ∂(i)‘j. Da har man:

SN(r) = SN(∂(i)‘j) = ß(i,j) og følgelig at (Ej)(jêb & ß(i,j)‘u =1).

Anta på den annen side at SN/iêa/(UN/jêb/(ß(i,j)))‘u=1. Da følger:

(6) (Ai)(iêa –> (Ej)(jêb & ß(i,j)‘u=1)). Anta zêY. Da finnes det iêa slik at z=s(i). Da følger ved hjelp av (6) at det finnes jêb slik at ß(i,j)‘u=1. Siden ß(i,j)= SN(∂(i)‘j) og ∂(i)‘j êg(s(i)) følger det at (Er)(rêg(s(i)) & (SN(r))‘u=1). Dermed har vi bevist at (4) holder.

Fra (3), (4) og formel (4) under punkt (ii) ovenfor har man:

(7) SN(Y) = UN/fê(b^a)/(SN/iêa/(ß(i,f(i))))

La oss nå definere Z;f og Z(0) ved:

Z;f = UN(Mg(∂(i)(f(i): iêa)) om fê(b^a)

Z(0) = Mg(Z;f: fê(b^a))

Da har man, siden ∂(i)‘f(i)êg(s(i)) Inkl T(x) for alle iêa, at:

(Ai)(iêa –> ∂(i)‘f(i) Inkl (x U Neg"x))

Men da må Z;f = UN/iêa/(∂(i)‘f(i)) Inkl (xU Neg"x). Dette innebærer at Z;fêT(x) om fê(b^a). Det følger herav at:

(8) Z(0) Inkl T(x).

Vi ønsker nå å bevise den følgende påstand:

(9) UN/fê(b^a)/(SN/iêa/(ß(i,f(i)))) = UN/rêZ(0)/(SN(r))

La oss først se på inklusjonen mot høyre: Anta

UN/fê(b^a)/(SN/iêa/(ß(i,f(i))))‘u =1 for vilkårlig uêI. Da finnes det f slik at

(10) fê(b^a) & (Ai)(iêa –> ß(i,f(i))‘u =1). I lys av definisjonen av ß er dette ekvivalent med:

(11) fê(b^a) & (Ai)(iêa –> SN(∂(i)‘f(i))‘u=1). Videre har vi fra (10) og definisjonene av Z;f og Z(0) at:

(12) Z;fêZ(0) & Z;f = UN(Mg(∂(i)‘f(i): iêa))

Vi må bevise: (13) (Ak)(kêZ;f –> k‘u=1). Nå har man:

(13) <–> (Ak)(kêUN(Mg(∂(i)‘f(i): iêa)) –> k‘u=1)
<–> (Ak)(Er)(rêMg(∂(i)‘f(i): iêa) &kêr) –> k‘u=1)
<–> (Ak)(Ei)(iêa & kê∂(i)‘f(i)) –> k‘u=1)
<–> (Ai)(iêa –> (Ak)(kê∂(i)‘f(i) –> k‘u=1))
<–> (Ai)(iêa –> (SN(∂(i)‘f(i)))‘u =1)
<–> (Ai)(iêa –> (ß(i,f(i))‘u =1)

Men i denne rekken av ekvivalente formler følger den siste fra (10). Følgelig holder (13). Vi har dermed bevist: (Er)(rêZ(0) & (Ak)(kêr –> k‘u=1), med andre ord at (14) (UN/rêZ(0)/(SN(r)))‘u=1. I lys av det som har blitt vist skulle det heller ikke være så vanskelig å se at inklusjonen mot venstre i (9) holder.

Dermed har vi gitt et fullstendig bevis for (9). Fra (7), (8) og (9) følger: (Ew)(w Inkl T(x) & SN(Y) = UN/rêw/(SN(r))). Dette viser at (++) holder.

Dette avslutter beviset for Lemma 6.15. **Q.E.D.**

*

Appendix I

*

Fullstendige definisjoner av teoriene E, E;1 og E;2.

§1 Språket L:(E:2)

Vi vil i dette tillegget gi en sammenfattende beskrivelse av beskrivelse av teoriene E, E;1 og E;2 som forhåpentlig kan lette oversikten.

La oss starte med å gi en definisjon av språket L;(E;2). Det er definert som det første-ordens språket som inneholder de følgende ikke-logiske predikater:
(i) Alle de ikke-logiske predikatene i L;A*. Dette språket ble definert i Del I av denne avhandlingen. (ii) Predikatene (1.1) – (1.36) på den følgende liste:

Ikke-logiske predikater i L;(E:2):

(1.1)	"x er et utsagn som er evident i verdenen w"	"Evid(x,w)"
(1.2)	"x er et utsagn som er direkte evident i verdenen w"	"DEvid(x,w)"
(1.3)	"x er et utsagn som representerer alt som kan tas for gitt i verdenen w"	"TEvid(x,w)"
(1.4)	"x er et utsagn som er evident for y ved tidspunktet t i verdenen w"	"Evid(x,y,t,w)"
(1.5)	"x er et utsagn som er evident for y ved tidspunktet t"	"Evid(x,y,t)"
(1.6)	"x er et utsagn som er direkte evident for y ved tids-punktet t i verdenen w"	"DEvid(x,y,t,w)"
(1.7)	"x representerer alt som kan anses for evident for y ved tidspunktet t i verdenen w"	"TEvid(x,y,t,w)"
(1.8)	"x representerer alt som kan tas for gitt ved tidspunktet t i verdenen w"	"TEvid(x,y,t)"
(1.9)	"x er et utsagn som y ved tidspunktet t er i stand til å kontrollere riktigheten av i verdenen w"	"Kntr(x,y,t,w)"
(1.10)	"x er et utsagn som y ved tidspunktet t i verdenen w verifiserer ved sanseiaktagelse"	"VS(x,y,t,w)"
(1.11)	"x er et utsagn som representerer noe y ser er tilfelle ved tidspunktet t i verdenen w"	"Ser(x,y,t,w)"
(1.12)	"x er et utsagn som representerer noe y hører er tilfelle ved tidspunktet t i verdenen w"	"Hør(x,y,t,w)"
(1.13)	"x er et utsagn som representerer noe y erindrer er tilfelle ved tidspunktet t i verdenen w"	"Er(x,y,t,w)"
(1.14)	"x er et utsagn som representerer noe y vet er tilfelle ved tidspunktet t i verdenen w"	"Vet(x,y,t,w)"
(1.15)	"x er et utsagn som representerer noe y tror er tilfelle ved tidspunktet t i verdenen w"	"Tror(x,y,t,w)"
(1,16)	"x er en teori som bør aksepteres gitt y i verdenen w"	"BørA(x,y,w)"
(1.17)	"x er et utsagn som bør aksepteres i verdenen w"	"Bør(x,w)"
(1.18)	"x er en verden som er enklere enn verdenen y sett relativt til verdenen w"	"Enk(x,y,w)"
(1.19)	"x er en verden som er nøyaktig like enkel som verdenen y sett relativt til verdenen w"	"LEnk(x,y,w)"

(1.20) "x er et tidspunkt i verdenen w" "Tp(x,w)"
(1.21) "x er et tidspunkt som kommer før tidspunktet y i verdenen w" "Før(x,y,w)"
(1.22) "z er avstanden i minutter mellom tidspunktet x og tidspunktet y i verdenen w" "Avst(z,x,y,w)"
(1.23) "x er et utsagn som det er direkte evident at er en logisk konsekvens av utsagnene i mengden y i verdenen w" "E;d(x,y,w)"
(1.24) "x er et utsagn som det er evident at er en logisk konsekvens av utsagnene i mengden y i verdenen w" "E(x,y,w)"
(1.25) "∏ er en utsagnstreoperasjon som det er direkte evident at avbilder gyldige utsagnstrær på gyldige utsagnstrær i verdenen w" "EFunc;d(∏,w)"
(1.26) "∏ er en utsagnstreoperasjon som det er evident at avbilder gyldige utsagnstrær på gyldige utsagnstrær i verdenen w" "EFunc(∏,w)"
(1.27) "x er en lov" "Lov(x)"
(1.28) "x er en antesedentbetingelse i loven y" "Ant(x,y)"
(1.29) "x er en konsekventbetingelse i loven y" "Kons(x,y)"
(1.30) " x er en lov som gjelder i verdenen w" "Sann:l(x,w)"
(1.31) "y er en mulig verden som representerer et kausalt alternativ til verdenen w" "R;c(w,y)"
(1.32) "Hvis det forholdet utsagnet x beskriver hadde vært tilfelle i verdenen w ville også det forholdet som beskrives av utsagnet y vært tilfelle" "Cf(x,y,w)"
(1.33) "x er mengden av alle de logisk mulige verdenene som er tilstrekkelig like verdenen w" "TLik(x,w)"
(1.34) "Verdenen x ligner minst like mye på verdenen y som verdenen z" "Sim;y(x,z)"
(1.35) "x er en kausallov" "CLov(x)"
(1.36) "Teorien x gir en forklaring på hvorfor x nødvendigvis er tilfelle i verdenen w" "Eksp(x,y,w)"
(1.37) "Aksiomene og slutningsreglene i systemet T over L er intuitivt mer evidente enn F" "ME;1(T,L,F)"
(1.38) "Aksiomene og slutningsreglene i systemet T;1 over L;1 er intuitivt mer evidente enn aksiomene og slutningsreglene i systemet T;2 over L;2" "ME;2(T;1,L;1,T;2,L;2)"
(1.39) " x er en setning i L som er direkte evident" "De(x,L)"
(1.40) "x er et utsagn eller en slutningsregel som det er lettere å innse riktigheten til enn utsagnet y" "Le(x,y)"

Dermed har vi gitt en fullstendig liste over de ikke-logiske predikatene i L;(E;2). Språket L;(E;2) utvidet med (1.37) – (1.39) er språket L;(E;2)+ som ble omtalt i Kapittel IV, §1. La oss nå gå over til å gi en helt detaljert definisjon av E;2.

§2 Teorien E:2

Siden E;2 er en første-ordens teori er det nok for å fiksere teorien fullstendig å angi språket til teorien samt hvilke formler i språket til den som er ikke-logiske aksiomer.

Språket til E;2 er L;(E;2) som vi nå har definert i §1. De ikke-logiske aksiomene i E;2 kan oppdeles i de følgende klasser:

(i)	Alle de ikke-logiske aksiomene i T;A*. Denne mengden av aksiomer ble strengt definert i "Studier i semantikk og erkjennelsesteori. Del I".
(ii)	Alle instanser av replacement og utsondringsaksiomet i L;(E;2). Dette innebærer at E;2 inneholder flere replacement og utsondringsaksiomer enn T;A*
(iii)	EpUA1 – EpUA17
(iv)	EpUE1, EpUE2
(v)	EpUB1 – EpUB4
(vi)	EpUC1 – EpUC6
(vii)	EpUD1 – EpUD3
(viii)	BEV1
(ix)	LA1 – LA17,
(x)	Sm27, CF1 – CF7, CF*8
(xi)	CLA1 –CLA5
(xii)	LA18 – LA20

Dette avslutter oversikten over de ikke-logiske aksiomene. Alle aksiomene som er nevnt under punktene (iii) – (xii) ble introdusert og kommentert forholdsvis utførlig i Kapittel II, Avsnitt A – Avsnitt E. Vi kaller disse aksiomklassene for henholdsvis de evidensteoretiske aksiomene, de tidsteoretiske aksiomene, de akseptanseteoretiske aksiomene, de kunnskapsteoretiske aksiomene, de prøvbar-hetsteoretiske aksiomene, de bevisteoretiske aksiomene, de generelle aksiomene for lovutsagn. aksiomene for kontrafaktiske betingelsesutsagn. aksiomene for kausallover, og tilslutt aksiomene om forklaringer.

De logiske aksiomene i E;2 er et vanlig standardsett for kvantifikasjonsteori med identitet. Et slikt aksiomsett er gitt i Del I. Slutningsreglene er modus ponens (MP) og universell generalisering (UG).

Dermed har vi gitt en fullstendig definisjon av E;2.

§3 Teorien E

Vi skal også gi definisjoner av de to andre teoriene som vi har arbeidet med i denne avhandlingen, teoriene E og E;1. Vi starter med E.

På samme måte som E;2 er E en første-ordens teori. Det er derfor nok for å fiksere teorien fullstendig å angi språket til teorien samt hvilke formler i språket til den som er ikke-logiske aksiomer.

Språket til E, L;E, er språket L;A som ble definert i Del I utvidet med predikatene (1.1) – (1.22) på listen i §1. Dette bestemmer L;E fullstendig.

De ikke-logiske aksiomene i E kan oppdeles i de følgende klasser:

(i)	Alle de ikke-logiske aksiomene i T;A. Denne mengden av aksiomer ble strengt definert i "Studier i semantikk og erkjennelsesteori. Del I".
(ii)	Alle instanser av replacement og utsondringsaksiomet i L;E. Dette innebærer at E inneholder flere replacement og utsondringsaksiomer enn T;A
(iii)	EpA1 – EpA17
(iv)	EpE1, EpE2
(v)	EpB1 – EpB4
(vi)	EpC1 – EpC6
(vii)	EpD1 – EpD3
(viii)	Sm27

Dette avslutter oversikten over de ikke-logiske aksiomene. Alle aksiomene som er nevnt under punktene (iii) – (viii) ble introdusert og kommentert forholdsvis utførlig i Kapittel II, Avsnitt A – Avsnitt E.

De logiske aksiomene i E er et vanlig standardsett for kvantifikasjonsteori med identitet. Et slikt aksiomsett er gitt i Del I. Slutningsreglene er modus ponens (MP) og universell generalisering (UG).

Dermed har vi gitt en fullstendig definisjon av E.

§4 Teorien E:1

På samme måte som E;2 er E;1 en første-ordens teori. Det er derfor nok for å fiksere teorien fullstendig å angi språket til teorien samt hvilke formler i språket til den som er ikke-logiske aksiomer.

Språket til E;1, L;(E;1), er språket L;E som ble definert rett ovenfor utvidet med predikatene (1.27) – (1.22) på listen i §1. Dette bestemmer L;(E;1) fullstendig.

De ikke-logiske aksiomene i E kan oppdeles i de følgende klasser:

(i)	Alle de ikke-logiske aksiomene i T;A. Denne mengden av aksiomer ble strengt definert i "Studier i semantikk og erkjennelsesteori. Del I".
(ii)	Alle instanser av replacement og utsondringsaksiomet i L;(E;1). Dette innebærer at E inneholder flere replacement og utsondringsaksiomer enn T;A
(iii)	EpA1 – EpA17
(iv)	EpE1, EpE2
(v)	EpB1 – EpB4
(vi)	EpC1 – EpC6
(vii)	EpD1 – EpD3
(viii)	Sm27
(ix)	LA1 – LA20
(x)	CF1 – CF8

(xi) CLA1 –CLA2

Dette avslutter oversikten over de ikke-logiske aksiomene. Alle aksiomene som er nevnt under punktene (iii) – (xi) ble introdusert og kommentert forholdsvis utførlig i Kapittel II, Avsnitt A – Avsnitt E.

De logiske aksiomene i E;1 er et vanlig standardsett for kvantifikasjonsteori med identitet. Et slikt aksiomsett er gitt i Del I. Slutningsreglene er modus ponens (MP) og universell generalisering (UG).

Dermed har vi gitt en fullstendig definisjon av E;1.

Som man ser er E;1 en enkel utvidelse av E med språket til E utvidet til L;(E;1). Derimot er E;2 ikke noen direkte utvidelse av E;1 siden man ikke får aksiomene i E;2 ved bare å legge nye til dem i E;1. Derimot får man L;(E;2) ved å utvide L;(E;1) med predikatene (1.23) – (1.26), samt predikatet "x er en verden" – "W(x)".

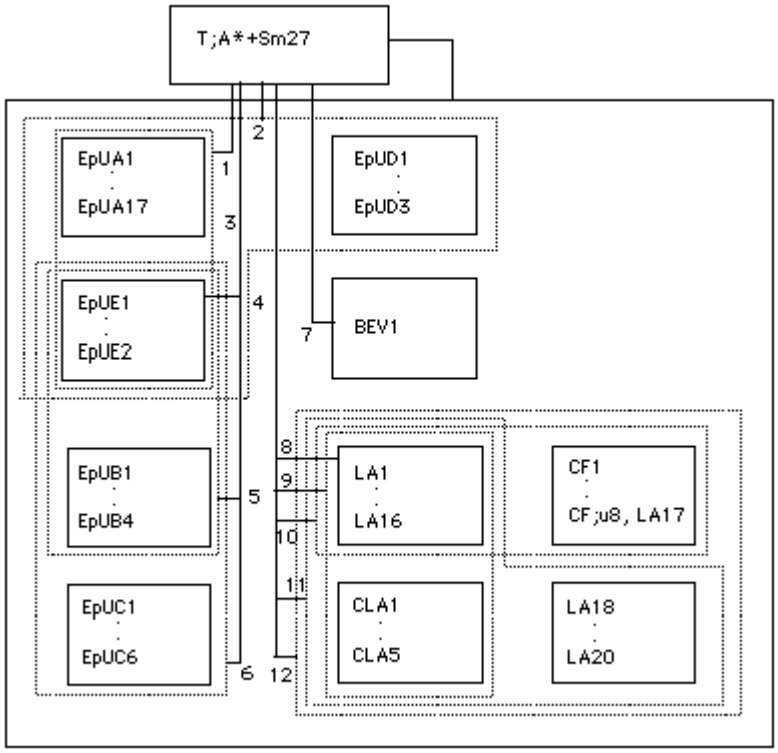
Derimot får man en teori som er ekvivalent med E;1 om man fjerner predikatene (1.23) – (1.26) fra L;(E;2) og til den resulterende teori legger aksiomet:

MV0 (Ax)(W(x) <–> MV(x))

På figuren på neste side har vi forsøkt å gi en anskuelig oversikt over de enkelte komponentene i E;2. Hovedaksiomklassene i denne teorien er representert ved rektangler som inneholder navnene på aksiomene i klassen. Som man ser er det i alt 11 slike hovedgrupper av aksiomer. T;A*+Sm27 representerer en slik gruppe, EpUA1 – EpU17 en annen, EpUD1 – EpUD3 en tredje, osv. Disse hovedgruppene av aksiomer kan i sin tur føyes sammen på forskjellige måter. F.eks. kan man se på den teorien man får når T;A*+Sm27 utvidet med aksiomene i de gruppene som er representert ved EpUA1 – EpUA17 og EpE1,EpE2. Denne mer omfattende gruppen av aksiomer er rammet inn med grå strek. De aksiomgrupper som er rammet inn med en slik grå strek er en gruppe som kan legges til T;A*+Sm27 uten at man behøver å legge til de andre aksiomene. En slik aksiomgruppe representerer derfor en frittstående del av teorien som kan betraktes uavhengig av de andre deler av teorien. Går det en pil fra rektanglet som inneholder "T;A* +Sm27" til en slik gruppe av aksiomer som er rammet inn innebærer dette at denne gruppen kan legges til T;A*+Sm27. På denne måten får man en interessant oversikt over delteorier av E;2 som separat kan vies en viss oppmerksomhet. F.eks. kan de evidensteoretiske og de prøvbarhetsteoretiske aksiomene sammen med de tidsteoretiske legges til T;A* slik at man får en selvstendig teori enhet.

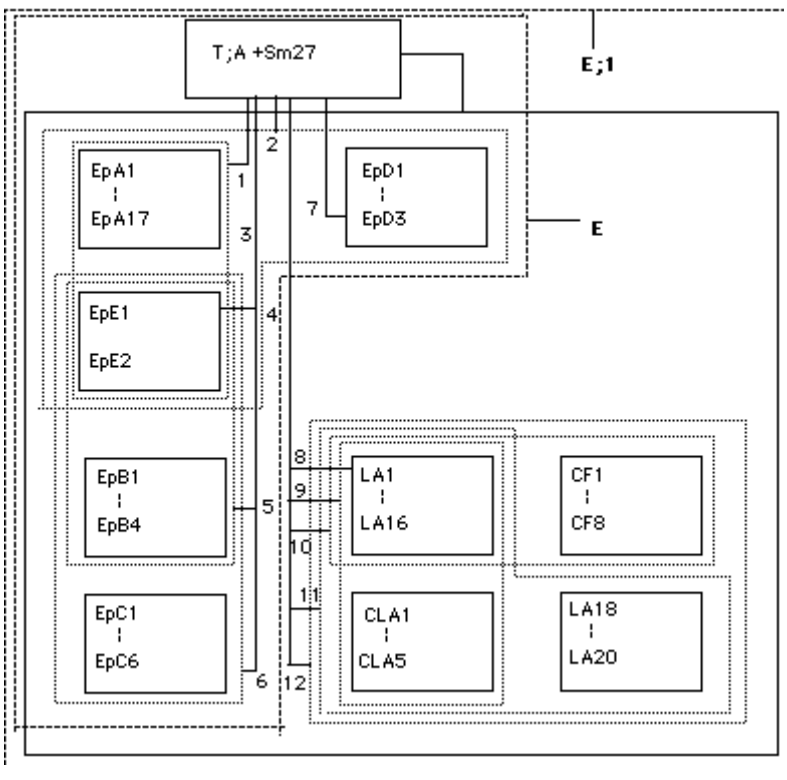
Figur som gir en oversikt over E;2 og subteorier av E;2

FIGUR 1 Oversikt over E;2

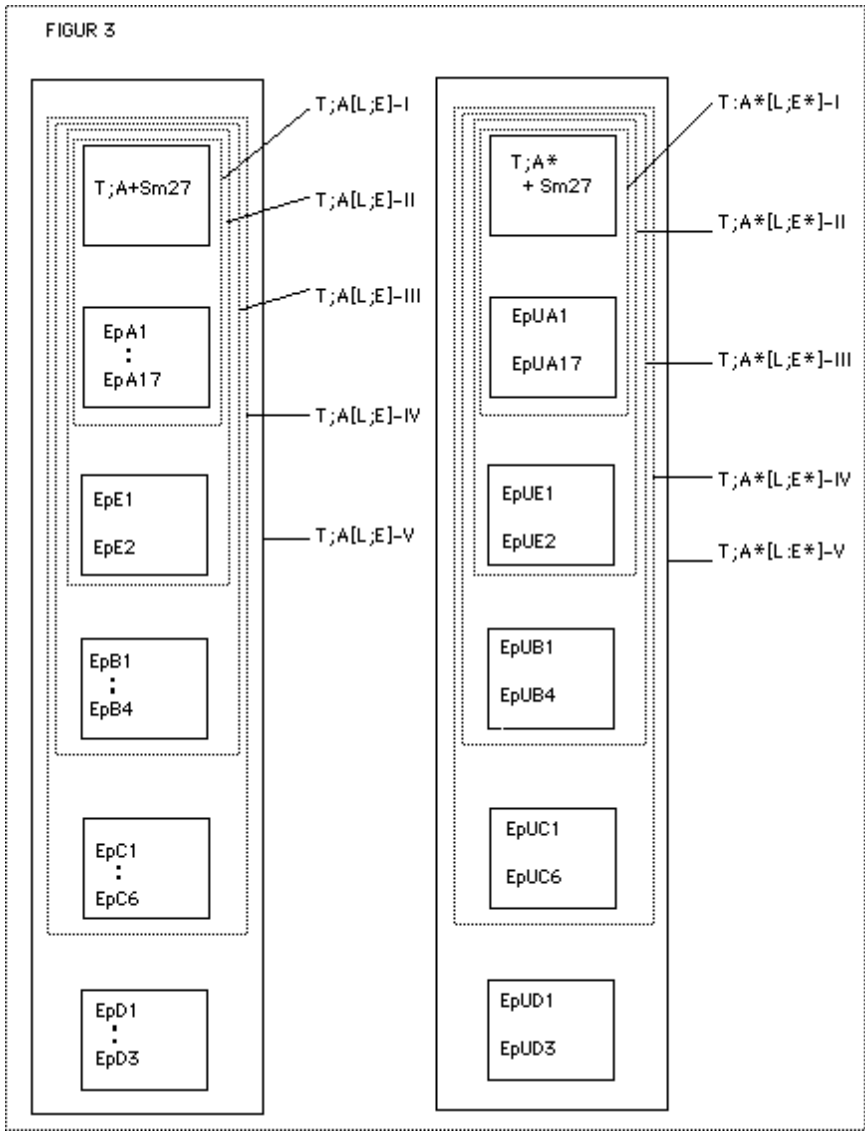


Figuren på denne siden gir en tilsvarende oversikt når det gjelder teoriene E;1 og E. På denne figuren er aksiomet BEV1 utelatt fordi dette ikke kan uttrykkes i språkene til E og E;1. Alle aksiomgruppene må med i teorien E;2. Dette er representert ved et rektangel som er trukket opp med en stiplet og som er merket med E;1. De aksiomene som hører med til E er rammet inn av en stiplet linje som er merket med E.

FIGUR 2 Oversikt over E;1 og E



Figuren på denne siden, FIGUR 3, gir en oversikt over hvilke aksiomer som inngår i de enkelte teoriene i teoriserien T;A[L;E]–I,..., T;A[L;E]–V, samt teorirekken T;A*[L;E*]–I,...., T;A*[L;E*]–V. Disse teoriene ble definert i Kapittel II, Avsnitt B, §5, §6 og i Kapittel II, Avsnitt C, §4. Merk at L;E* er språket L;E utvidet med predikatet "W(x)", dvs. "x er en verden", som nytt ikke-logisk predikat. "W(x)" må holdes adskilt fra "MV(x)" som leses "x er en logisk mulig verden". Ikke alle verdener er nødvendigvis logisk mulige verdener. De som ikke er det (hvis slike finnes) kalles for unormale verdener.



*

Referanser

*

Referanser

Carnap [1]	Carnap, Rudolf. *Meaning and Necessity*. Chicago: Chicago University Press, 1956.
Chellas [1]	Chellas, Brian. *The Logical Form of Imperatives.* California: Perry Lane Press Standford, 1969.
Church [1]	"A Formulation of The Logic of Sense and Denotation". In *Structure, Method and Meaning* (edited by P. Henle, M. Kallen and S.K. Langer), pp. 3 –24, New York, 1951.
Cresswell [1]	Cresswell, M.J. *Logics and Languages.* London: Methuen and Co. Ltd., 1973
Drake [1]	Drake, Frank R. Set Theory. *An Introduction to Large Cardinals.* Amsterdam: North Holland Publishing Company, 1974
Frege [1]	Frege, Gottlob. "Über Sinn und Bedeutung". In *Readings in Philosophical Analysis* (edited by H. Feigl and W. Sellars), New York: Appleton Century Crofts, 1949.
Gabbay [1]	Gabbay, Dov M. "Craigs interpolation theorem for modal logics" In *Conference in Mathematical Logic'70*, Berlin: Springer Verlag, 1970
Gødel [1]	Gødel, Kurt. "Über formal unentscheidbare Sätze der Principia Mathematica und verwandter Systeme". Monatshefte für Mathematik und Physik 38 (1931), 173-198.
Hintikka [1]	Hintikka J. *Models for Modalities.* Amsterdam: North Holland Publishing Company, 1969
Hintikka [2]	Hintikka J. *Knowledge and Belief.* Ithaca: Cornell University Press, 1962
Hughes & Cresswell [1]	Hughes, G.E. and Cresswell, M.J. *An introduction to modal logic.* London: Methuen and Co. Ltd., 1968. (Reprinted with corrections 1972)
Kanger [1]	Kanger, Stig. *Provability in Logic.* Stockholm: Almquist og Wiksell, 1957
Kanger [2]	Kanger, Stig. "The Morning Star Paradox". *Theoria* 23 (1957), 7–11
Kripke [1]	Kripke, Saul A. "Semantical analysis of modal logic I. Normal modal propositional calculi". *Zeitschrift für mathematische Logik und Grundlagen der Mathematik* 9 (1963), 67–96
Kripke [2]	Kripke, Saul A. "Semantical analysis of modal logic II. Non-normal modal propositional calculi". In The Theory of Models (Edited by Addison, Henkin and Tarski), pp 206–220. Amsterdam, 1965
Kripke [3]	Kripke, Saul A. "Semantical considerations on modal logic". *Acta Philosophica Fennica* 16 (1963) 83–94
Lemmon [1]	Lemmon, E. J. (in collaboration with Dana Scott) *The 'Lemmon notes': an introduction to modal logic* (edited by

	Krister Segerberg) *American philosophical quarterly* Monograph Series (edited by Nicholas Rescher), no. 11. Oxford: Basil Blackwell, 1977.
Montague [1]	Montague, Richard. "Universal Grammar". *Theoria* 36 (1970), 373–398
Montague [2]	Montague, Richard. "Pragmatics and Intensional Logic". *Synthese* 22 (1970), 68–94
Sahlqvist [1]	Sahlqvist, Henrik. "Completeness and correspondence in the first and second order semantics for modal logic". Cand. real. thesis, University of Oslo, 1973.
Sahlqvist [2]	Sahlqvist, Henrik. "A note on irreflexive, asymmetric and intransitive Kripke models". Preprint Series, Institute of Mathematics,University of Oslo, no.11, April 1972.
Scott [1]	"Advice on Modal Logic". In *Philosophical Problems in Logic Recent Developments* (edited by Karel Lambert), pp. 143 –173, Dordrecht: D. Reidel Publishing Company, 1974.
Scott [2]	Scott, Dana. "A Logic of Commands", Mimeographed, Standford University, April 1968.
Scott [3]	Scott, Dana. "Formalizing Intensional Notions", Mimeographed, Standford University, April 1968.
Scott [4]	Scott, Dana. "An Outline for Quantified Intensional Logic", Mimeographed, Standford University, June 1967.
Scott [5]	Scott, Dana. "The Logic of Tenses", Mimeographed, Standford University, December 1965.
Segerberg [1]	Segerberg, Krister. *An essay in classical modal logic*. 3 vols. Uppsala: University of Uppsala, 1971.
Shoenfield [1]	Shoenfield, Joseph. *Mathematical Logic.* London: Addison-Wesley, 1967.
Takeuti & Zaring [1]	Takeuti, G. and Zaring, W. M. *Axiomatic Set Theory.* Berlin: Springer Verlag, 1973.
Takeuti & Zaring [1]	Takeuti, G. and Zaring, W. M. *Introduction to Axiomatic Set Theory.* Berlin: Springer Verlag, 1971.
Tarski [1]	Tarski, Alfred. *Logic, Semantics, Metamathematics: Papers from 1923 to 1938* (translated by J.H. Woodger) Oxford: Clarendon Press, 1956.
Tarski [2]	Tarski, Alfred. "Fundamental Concepts of the Methodology of the Deductive Sciences". In *Logic, Semantics, Metamathematics: Papers from 1923 to 1938* (translated by J.H. Woodger) Oxford: Clarendon Press, 1956.
Thomason [1]	Thomason, S.K. "An incompleteness theorem in modal logic", *Theoria* 60 (1974), 30–34.
Thomason [1]	Thomason, S.K. "Semantical analysis of tense logics", *Journal of Symbolic Logic* 37 (1972).
von Wright [1]	von Wright, Georg Henrik. *An essay in deontic logic and the general theory of action.* Amsterdam: North-Holland Publishing Company,1968

von Wright [2] von Wright, Georg Henrik. *Explanation and Understanding.* London: Routledge & Kegan Paul,1971

von Wright [3] von Wright, Georg Henrik. *Causality and Determinism.* New York: Columbia University Press,1974